African Diaspora Journal of Mathematics — ISSN 1539-854X
Volume 10, Number 2, pp. 7–26 (2010) — www.math-res-pub.org/adjm

L'HYPOTHESE DE LINDELÖF

HAMET SEYDI*
Département de Mathématiques et d'Informatique
Faculté des Sciences et Techniques
Université Cheikh Anta Diop
Dakar-Fann (SENEGAL)
et
Institut de Recherches en Sciences Mathématiques Benjamin Banneker
Université Polytechnique de l'Ouest Africain
Dakar-Almadies (SENEGAL)

En Hommage à Nelson MANDELA à l'occasion de son quatre vingt onzième anniversaire
A la mémoire des victimes de l'apartheid.

Abstract : The main aim of this article is to prove the following theorem :
THEOREM(LINDELOFF HYPOTHESIS) : $\zeta(\sigma+it) = O(|t|^{\varepsilon})$ for every real number $\varepsilon > 0$ and for every $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

Résumé

Le but de cet article est d'établir le théorème suivant :
THEOREME (HYPOTHESE DE LINDELÖF) : $\zeta(\sigma+it) = O(|t|^{\varepsilon})$ quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$ et quel que soit $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

AMS Subject Classification :11M41

Keywords : Dirichlet Series and zeta functions

1 Introduction

Dans la théorie des séries de DIRICHLET, l'étude de l'ordre d'une fonction définie par une séries de DIRICHLET occupe une place importante. L'HYPOTHESE DE LINDELÖF porte sur l'ordre de la fonction $\zeta(\sigma)$ dans la bande critique $0 \leq \sigma \leq 1$. On montre que si f est une fonction définie par une série de DIRICHLET, il existe un nombre réel $\sigma_0(f)$ tel que la série de DIRICHLET définissant f soit absolument convergente quel que soit $\zeta = \sigma + it$ et $\sigma > \sigma_0(f)$. On définit l'ordre $u_f(\sigma)$ de f pour $\sigma > \sigma_0(f)$ comme la borne inférieure des nombres réels tels que $f(s) = O(|t|^{\alpha}), s = \sigma + it$. On montre que la fonction $y = \mu_f(\sigma)$ est une fonction continue de σ dans l'intervalle $]\sigma_0(f), +\infty[$ et que si $\sigma_1 < \sigma_2$ appartiennent à cet intervalle et si $y = q(\sigma)$ est l'équation de la droite passant par les points $M_1 = (\sigma_1, \mu_f(\sigma_1))$ et $M_2 = (\sigma_2, \mu_f(\sigma_2))$, on a $\mu_f(\sigma) \leq g(\sigma)$ quel que soit σ appartenant à

*E-mail address : hseydi@ucad.sn, hseydi@gmail.com

l'intervalle $[\sigma_1, \sigma_2]$.
Comme la fonction $\zeta(\sigma)$ est bornée pour $\sigma \geq 1+c, c>0$, on en déduit que $\mu(\sigma) = \mu_\zeta(\sigma) = 0$ si $\sigma > 1$ et par continuitè on a également $\mu(1) = 0$. L'équation fonctionnelle $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ et la relation $\mid \chi(s) \mid \sim (\frac{|t|}{2\pi})^{1/2-\sigma}$ pour $a \leq \sigma \leq b$ quand $\mid t \mid$ tend vers $+\infty$, montrent que $\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$ si $\sigma < 0$ et par continuité on a $\mu(0) = \frac{1}{2}$. La droite joignant les points $M_1 = (0, \frac{1}{2})$ et $M_2 = (1,0)$ a pour équation $y = g(\sigma) = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}$, on a donc $\mu(\sigma) \leq \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}$ quel que soit σ appartenant à l'intervalle $[0,1]$. L'hypothèse la plus simple possible est que le graphe de $\mu(\sigma)$ consiste en deux lignes droites :

$$\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma \quad \text{si} \quad \sigma \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{et } \mu(\sigma) = 0 \quad \text{si} \quad \sigma \geq \frac{1}{2}.$$

Cette hypothèse est connue sous le nom d'HYPOTHESE DE LINDELÖF. Elle est équivalente á $O(\frac{1}{2} + it) = \Theta(\mid t \mid^{\varepsilon})$ quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$. Le problème est lié au problème des diviseurs consistant en la détermination de la valeur asymptotique de $D(x) = \sum_{n \leq x} d(x)$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n et à celui de $D_k(x) = \sum_{n \leq x} d_k(x)$, où $d_k(x)$ est le nombre de possibilités d'écrire x comme produit de k nombres positifs, on a donc $D(x) = D_2(x)$. DIRICHELET a établi les relations suivantes :

$$D(x) = xLogx + (2\gamma - 1)x + \theta(x^{\frac{1}{2}})$$

$$D_k(x) = xP_k(x) + \Delta_k(x)$$

où $P_k(x)$ est un polynôme de degré $k-1$ et $\Delta_k(x) = O(x^{1-\frac{1}{k}} Log^{k-2} x)$ pour $k \geq 2$. En définissant α_k comme la borne inférieure des α tels que $\Delta_k(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon}), \varepsilon > 0$, on a donc $\alpha_k \leq 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$. On montre qu'on a la relation $\frac{1}{x}\int_0^x \Delta_k^2(u)du = O(x^{2\beta_k+\varepsilon}), \varepsilon > 0$ et que $\beta_k \geq \frac{k-1}{2k}$, que la relation $\beta_k = \frac{k-1}{2k}$ est équivalente à la relation $\delta_k \leq \frac{k+1}{2}$, et que l'HYPOTHESE DE LINDELÖF est équivalente à chacune des relations suivantes : $\alpha_k \leq \frac{1}{2}$, $\beta_k \leq \frac{1}{2}$ et $\beta_k = \frac{k-1}{2k}$. Dans cet article nous montrons que $\Delta_k(x) = O(x^{\frac{1}{2}} Log^{k-1} x)$, ce qui implique donc que $\alpha_k \leq \frac{1}{2}$ et établit l'HYPOTHESE DE LINDELÖF.
Nous allons maintenant établir le théorème suivant :
THEOREME (HYPOTHESE DE LINDELÖF) : $\zeta(\sigma + it) = O(|t|^{\varepsilon})$ quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$ et quel que soit $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

2 Démonstration de l'Hypothèse de Lindelöff

Lemme 2.1. *Soit $\phi(x)$ une fonction continument dérivable sur l'intervalle $[a,b]$. Alors si $[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x, on a la relation*

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} \phi(n) &= \int_a^b \phi(x)\, dx + \int_a^b (x - [x] - \frac{1}{2})\, \phi'(x)\, dx \\ &+ (a - [a] - \tfrac{1}{2})\, \phi(a) - (b - [b] - \tfrac{1}{2})\, \phi(b).\end{aligned}$$

Démonstration. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_a^b [x]\ \phi'(x)\ dx &= \int_{[a]}^{[b]} [x]\ \phi'(x)\ dx - \int_{[a]}^{a} [x]\ \phi'(x)\ dx + \int_{[b]}^{b} [x]\ \phi'(x)\ dx \\
&= \sum_{n=[a]}^{[b]-1} n \int_n^{n+1} \phi'(x)dx - [a]\{\phi(a)-\phi([a])\} + [b]\{\phi(b)-\phi([b])\} \\
&= \sum_{n=[a]}^{[b]-1} n\{\phi(n+1)-\phi(n)\} - [a]\{\phi(a)-\phi([b])\} + [b]\{\phi(b)-\phi([b])\} \\
&= -\sum_{n=[a]+1}^{[b]} \phi(n) - [a]\phi(a) + [b]\phi(b).
\end{aligned}$$

De même

$$\int_a^b (x-\frac{1}{2})\ \phi'(x)\ dx = (b-\frac{1}{2})\phi(b) - (a-\frac{1}{2})\ \phi(b) - \int_a^b \phi(x)\ dx.$$

On a donc

$$\int_a^b (x-[x]-\frac{1}{2})\ \phi'(x)\ dx = \sum_{n=[a]+1}^{[b]} \phi(n) - \int_a^b \phi(x)\ dx + (a-[a]-\frac{1}{2})\phi(a) - (b-[b]-\frac{1}{2})\ \phi(b)$$

ce qui équivaut au résultat. □

Lemme 2.2. *Soient N un entier ≥ 0 et $f(x)$ une fonction à valeurs réelles monotone définie sur $[N,+\infty[$. Alors on a la relation*

$$\sum_{N\leq n\leq x} f(n) = \int_N^x f(t)dt + O(|f(x)|+|f(N)|).$$

Démonstration. On peut supposer f croissante. Soient $m=[x], a_k = N+k$ si $k \leq m-N$ et $a_{n-N+1} = x$. En calculant les sommes de RIEMANN de ce découpage, on obtient la relation :

$$\sum_{N\leq n\leq m-1} f(n) + (x-m)f(m) \leq \int_N^x f(t)\ dt \leq \sum_{N+1\leq n\leq m} f(n) + (x-m)f(x).$$

On en déduit donc la relation :

$$(x-m)\ f(m) \leq \int_N^x f(t)\ dt - \sum_{N\leq n\leq m-1} f(n) \leq [f(m)-f(N)] + (x-m)f(x)$$

$$\Longleftrightarrow (x-m-1)\ f(m) \leq \int_N^x f(t)\ dt - \sum_{N\leq n\leq x} f(n) \leq -f(N) + (x-m)\ f(x).$$

Ce qui implique donc la relation

$$\left| \int_N^x f(t)\ dt - \sum_{N\leq n\leq x} f(n) \right| = O(|f(x)|+|f(N)|).$$

□

Lemme 2.3. *Soit k un entier ≥ 0. Alors on a la relation*

$$\sum_{1\leq n\leq x} \frac{(Log\ n)^k}{n} = \frac{(Log\ x)^{k+1}}{x} + \gamma_k + O\left(\frac{(Log\ x)^k}{x}\right)$$

où γ_k est une constante absolue et $\gamma_o = \gamma$ (constante d'EULER).

Démonstration. 1) Nous commencerons par le cas classique $k = 0$. Soit $m = [x] + 1$. Posons $\delta_n = \frac{1}{n} - Log(1 + \frac{1}{n})$.
Alors on a $Log\ m = \sum_{1\leq n\leq m-1} Log(1 + \frac{1}{n}) = \sum_{1\leq n\leq m-1} \frac{1}{n} - \sum_{1\leq n\leq m-1} \delta_n$.
Or $0 < \delta_n < \frac{1}{2n^2}$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ est convergente et sa somme est un nombre positif $\gamma_o = \gamma$ (constante d'EULER). De plus on a

$$\sum_{n=m}^{+\infty} \delta_n < \frac{1}{2}\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{2}\sum_{n=m}^{+\infty}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = \frac{1}{2(m-1)}.$$

On en conclut donc que $\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} = Log\ m + \gamma + O(\frac{1}{m})$. Mais $Log\ m = Logx + O(\frac{1}{x})$ et $O(\frac{1}{m}) = O(\frac{1}{x})$, donc $\sum_{1\leq n\leq x} \frac{1}{n} = \sum_{1\leq n\leq m-1} \frac{1}{n} = Log(x) + \gamma_o + O(\frac{1}{x})$.

2) Nous supposerons maintenant que $k = 1$. Posons $m = [x] + 1$. Il est clair que $(Log\ m)^2 = \sum_{n=1}^{m-1}[Log(n+1)^2 - Log(n)^2]$ et comme $Log(n+1) = Log(n) + \frac{1}{n} - \delta_n$, nous avons : $\frac{1}{2}(Logm)^2 = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{Log(n)}{n} - \sum_{n=1}^{m-1}(\delta_n Log\ n + \frac{1}{n}\delta_n - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2}\delta_n^2)$.
Comme $O < \delta_n < \frac{1}{2n^2}$, on en conclut donc que
$\left|\sum_{n=m}^{+\infty}\left(\delta_n\ Log\ n + \frac{1}{n}\delta_n - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2}\delta_n^2\right)\right| < \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{Log\ n}{n^2}$
$= \int_m^{+\infty} \frac{Log(x)}{x^2}\ dx + O\left(\frac{Log\ m}{m^2}\right)$ (d'après le lemme (2))
$= \frac{1}{m} + \frac{Log\ m}{m} + \frac{Log\ m}{m^2}$.
Les deux premiers membres de cette dernière relation montrant que la série $\sum_{n=m}^{+\infty}(\delta_n Logn + \frac{1}{n}\ \delta_n - \frac{Logn}{n^2} - \frac{1}{2}\ \delta_n)$ est convergente et si γ_1 désigne sa somme, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{Log\ n}{n} = \frac{1}{2}(Log\ m)^2 + \gamma_1 + O\left(\frac{Log\ m}{m}\right).$$

Or $Log\ m = Logx + O(\frac{1}{x})$ et $O(\frac{Log\ m}{m}) = O(\frac{Log\ x}{x})$,
donc

$$\sum_{1\leq n\leq x}\frac{Log\ n}{n}=\sum_{1\leq n\leq m-1}\frac{Log\ n}{n}=\frac{1}{2}(Log\ x)^2+\gamma_1+O\left(\frac{Log\ x}{n}\right).$$

3) Nous supposerons maintenant $k\geq 2$.

Nous poserons comme toujours $m=[x]+1$. Il est clair que $(Log\ m)^{k+1}=\sum_{n=1}^{m-1}[(Log(x+1))^{k+1}-(Log(x))^k]$ et comme $Log(n+1)=Log\ n+\frac{1}{n}-\delta_n$. On en déduit que :

$$(Log\ m)^{k+1}=\sum_{n=1}^{m-1}\left(\sum_{\ell=0}^{k}C_{k+1}^{\ell}(Log\ n)^{\ell}\ .\ (\frac{1}{n}-\delta_n)^{k+1-\ell}\right).$$

Comme $0<\delta_n<\frac{1}{2n^2}$, on en conclut que pour $\ell\neq k,\ C_{k+1}^{\ell}\ (Log\ n)^{\ell}\ (\frac{1}{n}-\delta_n)^{k+1-\ell}=O\left(\frac{(Log\ n)^{\ell}}{n^2}\right)$.

On a donc la relation $\frac{1}{k+1}\ (Log\ m)^{k+1}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(Log\ n)^k}{n}=\sum_{n=1}^{m-1}u_n$ où $u_n=-\delta_n(Log\ n)^k+\frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}C_{k+1}^{\ell}(Log\ n)^{\ell}(\frac{1}{n}-\delta_n)^{k+1-\ell}=O\left(\frac{(Log\ n)^k}{n^2}\right)$.

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ est convergente et si γ_k désigne sa somme, on a :

$$\frac{1}{k+1}\ (Log\ m)^{k+1}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(Log\ n)^k}{n}+\gamma_k-\sum_{n=m}^{+\infty}u_n.$$

Mais u_n est combinaison linéaire d'expressions qui sont $O\left(\frac{(Log\ n)^{\ell}}{n^2}\right)$ pour un $\ell,\ 0\leq\ell\leq k$. Or d'après le lemme (2.2), on a la relation

$$\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{(Log\ n)^{\ell}}{n^2}=\int_m^{+\infty}\frac{(Log\ x)^{\ell}}{x^2}\ dx+O\left(\frac{(Log\ m)^{\ell}}{m^2}\right).$$

Pour $\ell\geq 1$, on a

$$\int_m^{+\infty}\frac{(Log\ x)^{\ell}}{x^2}\ dx=\frac{(Log\ m)^{\ell}}{m}+\ell\int_m^{+\infty}\frac{(Log\ x)^{\ell-1}}{x^2}\ dx$$

et pour $\ell=0$, $\int_m^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{m}$.

On voit donc par récurrence sur ℓ que $\int_m^{+\infty}\frac{(Log\ x)^{\ell}}{x^2}\ dx=O\left(\frac{(Log\ m)^{\ell}}{m}\right)$, donc $\sum_{n=m}^{+\infty}u_n=O\left(\frac{(Log\ m)^k}{m}\right)$ on en déduit donc que

$$\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(Log\ n)^k}{n}=\frac{1}{k+1}(Log\ m)^{k+1}+\gamma_k+O\left(\frac{(Log\ m)^k}{m}\right)$$

et comme $Log\ m = Log(x) + O(\frac{1}{x})$ et $O\left(\frac{(Log\ m)^k}{m}\right) = O\left(\frac{(Log\ m)^k}{x}\right)$, on en conclut que

$$\sum_{1\leq n\leq x} \frac{(Log\ n)^k}{n} = \frac{1}{k+1}(Log\ x)^{k+1} + \gamma_k + O\left(\frac{(Log\ x)^k}{x}\right).$$

C.Q.F.D. □

Soit n un entier positif. Pour tout entier $k \geq 1$, $d_k(n)$ désignera le nombre de manière d'exprimer n comme un produit de k facteurs, donc $d(x) = d_2(x)$ désigne aussi le nombre de diviseurs de n, et $d_1(n) = 1$ quelque soit n.
Nous définirons $D_k(x) = \sum_{1\leq n\leq x} d_k(n)$.

Lemme 2.4. *Pour tout entier $k \geq 2$, on a les relations*

$$E_k(x) = \sum_{1\leq n\leq x} \frac{d_k(n)}{n} = Q_k(Log\ x) + O\left(\frac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$D_k(x) = \sum_{1\leq n\leq x} d_k(n) = x\, P_k(Log\ x) + O\left(\sqrt{x}(Log\ x)^{k-1}\right)$$

où $XP_k(X)$ et $Q_k(X)$ sont des polynômes de degré k.

Démonstration. I) Nous allons d'abord calculer $E_2(x)$. Comme $d_2(x)$ est égal au nombre de couples (a,b) tels que $ab = n$, nous avons :

$$\sum_{1\leq n\leq x} \frac{d_2(n)}{n} = \sum \frac{1}{ab}$$

où la somme au second membre s'étend à tous les nombres a et b tels que $ab \leq x$. Soit S_1 la partie de cette somme dans laquelle $a \leq \sqrt{x}$, S_2 la partie de cette somme dans laquelle $b \leq \sqrt{x}$ et S_3 la partie de cette somme dans laquelle $a \leq \sqrt{x}$ et $b \leq \sqrt{x}$. Il est clair que $E_2(x) = S_1 + S_2 - S_3$.
Posons $y = \sqrt{x}, z = \frac{x}{a}$, nous avons alors d'après le lemme (2.3) :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{a\leq y} \frac{1}{a} \sum_{b\leq z} \frac{1}{b} = \sum_{a\leq y} \frac{1}{a}\left[Log(\frac{z}{a}) + \gamma + O(\frac{a}{z})\right] \\
&= Log\ z. \sum_{a\leq y} \frac{1}{a} - \sum_{a\leq y} \frac{Log\ a}{a} + \gamma \sum_{a\leq y} \frac{1}{a} + O(\frac{1}{z}) \sum_{a\leq y} \frac{1}{a} \\
&= [Log\ z + \gamma][Log\ y + \gamma + O(\frac{1}{y})] - \frac{1}{2}(Log\ y)^2 - \gamma_1 + O(\frac{Log\ y}{y}) + O(\frac{1}{y}) \\
&= \frac{3}{8}\ (Log\ x)^2 + \frac{3}{2}\ \gamma\, Log\ x + \gamma^2 - \gamma_1 + O(\frac{Log\ x}{x})
\end{aligned}$$

Il est clair que $S_2 = S_1$ d'après le lemme (2.3), nous avons également

$$\begin{aligned}
S_3 = \left(\sum_{a\leq y} \frac{1}{a}\right)^2 &= \left[Log\ y + \gamma + O(\frac{1}{z})\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\ (Log\ x)^2 + \gamma\, Log\ x + \gamma^2 + O\left(\frac{Log\ x}{\sqrt{x}}\right)
\end{aligned}.$$

Par conséquent on a :

$$E_2(x) = S_1 + S_2 - S_3 = \frac{1}{2}(Log\ x)^2 + 2\gamma\, Log\ x + \gamma^2 + O\left(\frac{Log\ x}{\sqrt{x}}\right).$$

II) Nous allons maintenant montrer que si $E_\ell(x) = Q_\ell(Log\ x) + O\left(\frac{(Log\ x)^{\ell-1}}{\sqrt{x}}\right)$ pour $\ell \leq k$, où $Q_\ell(x)$ est un polynôme de degré ℓ, on a
$D_\ell(x) = x\, P_\ell(Log\ x) + O\left(\frac{(Log\ x)^{\ell-1}}{\sqrt{x}}\right)$ pour $\ell \leq k$, où $P_\ell(x)$ est un polynôme de degré ℓ. Il nous suffit de prouver l'assertion pour $\ell = k$.
Posons $u_n = \frac{d_k(x)}{n}$ et $v_n = n$.
Nous avons donc

$$\begin{aligned} D_k(x) &= \sum_{1\leq n\leq x} u_n\, v_n \\ &= \sum_{1\leq n\leq x} [E_k(x) - E_k(n-1)]\, v_n \\ &= \sum_{1\leq n\leq x-1} E_k(n)[v_n - v_{n+1}]\, E_k(m)\, v_n \end{aligned}$$

où $D_k(x) = -\sum_{1\leq n\leq x-1} E_k(n) + E_k(m)\, v_m$.
Puisque $m = x + O(1)$, on en déduit que $E_k(m)\ v_m = x\ S_k(Log\ x) + O(\sqrt{x}(Log\ x)^{k-1}$ où $S_k(X)$ est un polynôme de degré k puisque
$O(S_k(x)) = O(\sqrt{x}(Log\ x)^{k-1})$.
Comme $E_k(x) = Q_k(Log\ x) + O\left(\frac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right)$, $-\sum_{1\leq n\leq x-1} E_k(n)$ est combinaison linéaire d'expression de la forme $\sum_{1\leq n\leq x-1} (Log\ n)^\ell \quad 0 \leq \ell \leq k$ et d'une expression de la forme $O\left(\sum_{1\leq n\leq x-1} \frac{(Log\ n)}{\sqrt{n}}\right)$.
D'après le lemme (2.2), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq n\leq x-1} (Log\ n)^\ell &= \int_1^{x-1} (Log\ t)^\ell\, dt + O((Log\ x)^\ell) \\ &= (x-1)Log(x-1) - \ell \int_1^{x-1} (Log\ t)^{\ell-1}\, dt + O((Log\ x)^\ell) \end{aligned}$$

On démontre par récurrence sur ℓ que
$\int_1^{x-1} (Log\ t)^\ell dt = (x-1)\ H_\ell(Log(x-1))$ où $H_\ell(X)$ est un polynome de degré ℓ et comme $Log(x-1) = Log\ x + O(\frac{1}{x})$, on en déduit que
$\int_1^{x-1} (Log\ t)^\ell\ dt = x\ T_\ell(Log\ x) + O((Log\ x)^\ell)$ où $T_\ell(X)$ est un polynôme de degré ℓ.
On en déduit donc que

$$D_k(x) = x\, P_k(Log\ x) + O((Log\ x)^k) + O\left(\sum_{1\leq n\leq x-1} \frac{(Log\ n)}{\sqrt{n}}\right).$$

En considérant maintenant la fonction $f_k(x) = \frac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{n}}$, on a :

$f_k'(x) = \dfrac{2(k-1) - Log\ x}{2x\sqrt{x}}\ .\ (Log\ x)^{k-1}$ qui st décroissante pour $x \geq e^{2k-2}$.
Posons $m = [e^{2k-2}]$, alors pour $x \geq m+1$. On a d'après le lemme (2.1) :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq n\leq x-1} \frac{(Log\ n)^{k-1}}{\sqrt{n}} &= \sum_{1\leq n\leq m} \frac{(Log\ n)^{x-1}}{\sqrt{n}} + \int_{m+1}^{x-1} \frac{(Log\ t)^{k-1}}{\sqrt{t}}\, dt + O(1) \\
&= \int_{m+1}^{x-1} \frac{(Log\ t)^{k-1}}{\sqrt{t}}\, dt + O(1) \\
\int_{m+1}^{x} \frac{(Log\ t)^{k-1}}{\sqrt{t}}\, dt &= 2\sqrt{x-1}(Log(x-1))^{k-1} - 2\sqrt{m+1}\ (Log(m+1))^{k-1} \\
&= 2k \int_{m+1}^{x-1} \frac{(Log\ t)^{k-1}}{\sqrt{t}}\, dt
\end{aligned}.$$

On montre donc par récurrence sur k,
que $\displaystyle\int_{m+1}^{x-1} \frac{(Log\ t)^{k-1}}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{x-1}\ U_k(Log(x-1))$ où $U_k(X)$ est un polynôme de degré $k-1$,
donc $\displaystyle\sum_{1\leq n\leq x-1} \frac{(Log\ n)^{k-1}}{\sqrt{n}} = O(\sqrt{x}\ (Log\ x)^{k+1})$.
Par conséquent $D_k(x) = x\ P_k(Log\ x) + O(\sqrt{x}(Log\ x)^{k-1})$ où $X\ P_k(X)$ est un polynôme de degré $\leq k$. Mais comme $D_k(x) = x\ \tilde{P}_k(Log\ x) + O(x^{\frac{k-1}{k}})$ d'après ([2] 12-1-4) où $\tilde{P}_k(X)$ est un polynôme de degré k, on en déduit que $P_k(X)$ est de degré k.
III) 1) Il nous suffit maintenant de montrer que si
$E_\ell(x) = Q_\ell(Log\ x) + O\left(\dfrac{(Log\ x)^{\ell-1}}{\sqrt{x}}\right)$ pour tout $\ell \leq k$, où $Q_\ell(X)$ est un polynôme de degré ℓ, alors on a également
$E_{k+1}(x) = Q_{k+1}(Log\ x) + O\left(\dfrac{(Log\ x)^{k}}{\sqrt{x}}\right)$ où $Q_{k+1}(X)$ est un polynôme de degré k.
Par définition $E_{k+1}(x) = \displaystyle\sum_{1\leq n\leq x} \frac{d_{k+1}(n)}{n}$ donc $E_{k+1}(x) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq n\leq x \\ a_1\ldots a_{k+1}=n}} \frac{1}{a_1,\ldots,a_{k+1}} (*)$
Posons $b_i = \displaystyle\prod_{\substack{1\leq j\leq k+1 \\ j\neq i}} a_j$ et pour chaque $i, 1 \leq i \leq\ k+1$, soit si la somme des termes du second membre de l'expression (*) pour lesquels $b_i \leq \sqrt{x}$. Il est clair que

$$\begin{aligned}
S_i &= \sum_{1\leq b\leq\sqrt{x}} \frac{d_k(b)}{b} \sum_{1\leq a\leq\frac{x}{b}} \frac{1}{a} = \sum_{1\leq b\leq\sqrt{x}} \frac{d_k(b)}{b}[Log(\frac{X}{b} + \gamma + O(\frac{b}{x})] \\
&= Log(x)\ .\sum_{1\leq b\leq\sqrt{x}} \frac{d_k(b)}{b} - \sum_{1\leq b\leq\sqrt{x}} \frac{d_k(b)}{b}\ Log\ b + \gamma \sum_{1\leq b\leq\sqrt{x}} \frac{d_k(b)}{b} \\
&+\ O(\frac{1}{x}) \sum_{1\leq b\leq\sqrt{x}} \frac{d_k(b)}{b} \\
&= [Log(x) + \gamma]\ E_k(\sqrt{x}) - \sum_{1\leq b\leq\sqrt{x}} \frac{d_k(b)}{b}\ Log(b) + O\left(\frac{(Log\ x)^k}{\sqrt{x}}\right)
\end{aligned}.$$

De même soit S_i' la somme des termes du second membre de l'expression (*) pour lesquels

$b_i > \sqrt{x}$

$$S'_i = \sum_{1\le a\le\sqrt{x}} \frac{1}{a} \sum_{\sqrt{x}<b\le \frac{x}{a}} \frac{d_k(b)}{b}$$

$$\begin{aligned} S'_i &= \sum_{1\le a\le\sqrt{x}} \frac{1}{a}\,[E_k\,(\frac{x}{a}) - E_k(\sqrt{x})] \\ &= -\left[\frac{1}{2}\,Log\,x+\gamma+O(\frac{1}{\sqrt{x}})\right] E_k(\sqrt{x}) + \sum_{1\le a\le\sqrt{x}} \frac{1}{a}\,E_k\,(\frac{x}{a}) \end{aligned}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} S_i+S'_i &= \frac{1}{2}\,Log(x)\,.\,E_k(\sqrt{x}) + \sum_{1\le a\le\sqrt{x}} \frac{1}{a}\,E_k\,(\frac{x}{a}) \\ &- \sum_{1\le b\le\sqrt{x}} \frac{d_k(b)}{b}\,Log\,b + O\left(\frac{(Log\,x)^k}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned}.$$

Calculons maintenant $A = \sum_{1\le b\le\sqrt{x}} \frac{d_k(b)}{b}\,Log\,b$

$$\sum_{1\le b\le\sqrt{x}} E_k(b)\,[Log(b)-Log(b+1)] + E_k(m)\,Log(m) \text{ où } m = [\sqrt{x}].$$

Mais $E_k(m) = E_k(\sqrt{x})$ et $Log(m) = \frac{1}{2}\,Log(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ donc

$A = -\sum_{1\le b\le\sqrt{x-1}} E_k(b)\,Log(1+\frac{1}{b}) + \frac{1}{2}\,Log(x)\,.\,E_k(\sqrt{x}) + O\left(\frac{(Log\,x)^k}{\sqrt{x}}\right).$

On en déduit donc que

$S_i+S'_i = \sum_{1\le a\le\sqrt{x}} \frac{1}{a}\,E_k(\frac{x}{a}) + \sum_{1\le a\le\sqrt{x-1}} E_k(a)\,Log(1+\frac{1}{a}) + O\left(\frac{(Log\,x)^k}{\sqrt{x}}\right).$

Mais comme $E_k(m)\,.\,Log(1+\frac{1}{m}) = O\left(\frac{(Log\,x)^k}{\sqrt{x}}\right)$, on a également

$S_i+S'_i = \sum_{1\le a\le\sqrt{x}} \left[\frac{1}{a}\,E_k(\frac{x}{a}) + E_k(a)\;\;Log(1+\frac{1}{a})\right] + O\left(\frac{(Log\,x)^k}{\sqrt{x}}\right).$

$S_i+S'_i = \sum_{1\le a\le\sqrt{x}} \frac{1}{a}\,[E_k(\frac{x}{a}) + E_k(a)] + \sum_{1\le a\le\sqrt{x}} E_k(a)\left[Log(1+\frac{1}{a}) - \frac{1}{a}\right]$

$+O\left(\frac{(Log\,x)^k}{\sqrt{x}}\right).$

Nous allons d'abord étudier l'expression

$$C = \sum_{1\le a\le\sqrt{x}} E_k(a)\left[Log(1+\frac{1}{a}) - \frac{1}{a}\right]$$

2) Nous avons $E_k(x) = Q_k(Log\,x) + O\left(\frac{(Log\,x)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right)$. où $Q_k(X)$ est un polynôme de degré k et $Log(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Soit donc ℓ un entier, $1 \leq \ell \leq k$ et soit

$$C^\ell = \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} (Loga)^\ell \left[Log(1+\frac{1}{a}) - \frac{1}{a} \right].$$

Posons

$$\begin{aligned} S(y) &= \sum_{1\leq a \leq y} \left[Log(1+\frac{1}{a}) - \frac{1}{a} \right] \\ &= Log(m) - \sum_{1 \leq a \leq m-1} \frac{1}{a} \text{ où } m' = [y+1]. \end{aligned}.$$

D'après le lemme (2), $S(y) = -\gamma + O\left(\frac{1}{y}\right)$

$C_\ell = \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x-1}} S(a) \; [(Log(a))^\ell - (Log(a+1))^\ell] + S(m)(Log\; m)^\ell$ où $m[\sqrt{x}]$.

On en déduit donc que

$$C_\ell = O\left(\frac{(Log\; x)^\ell}{\sqrt{x}} \right).$$

Par conséquent on en déduit que

$$\sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} \frac{(Log\; a)^{k-1}}{\sqrt{a}} \left[Log(1+\frac{1}{a}) - \frac{1}{a} \right] = O\left(\frac{(Log\; x)^{k-1}}{\sqrt{x}} \right)$$

et

$$\sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} Q_k(a) \left[Log(1+\frac{1}{a}) - \frac{1}{a} \right] = O\left(\frac{(Log\; x)^k}{\sqrt{x}} \right).$$

On a donc la relation

$$S_i + S'_i = \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} \left[E_k(\frac{x}{a}) + E_k(a) \right] + O\left(\frac{(Log\; x)^k}{\sqrt{x}} \right).$$

Comme $E_k(x) = Q_k(Log\;\; x) + \varepsilon_k(x)$ où $Q_k(X)$ est un polynôme de degré k et $\varepsilon_k(x) = O\left(\frac{(Log\; x)^k}{\sqrt{x}} \right)$, on en déduit que

$S_i + S'_i = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ où $I_1 = \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} \frac{Q_k(Log\; a)}{a}$ $I_2 = \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} \frac{Q_k(Log\; (\frac{x}{a}))}{a}$

$I_3 = \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} \frac{\varepsilon_k(a)}{a}$ et $I_4 = \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} \frac{\varepsilon_k(\frac{x}{a})}{a}$.

2.1) Nous allons d'abord calculer I_4. Comme $E_k(x)$ est une fonction en escalier, $\varepsilon_k(x)$ est continue et dérivable sauf aux points de discontinuité de $E_k(x)$ qui sont les points entiers. Par conséquent si $N = [\sqrt{x}] + 1$ et $m = [x]$, $\varepsilon_k(\frac{x}{t})$ est continue et dérivable sauf aux points $t_\nu = \frac{x}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$, $N \leq \nu \leq m$.

Nous supposerons que x n'est pas entier, donc les t_ν ne sont pas entiers. Soit ε un nombre réel positif tel que $\varepsilon < \frac{t_\nu - t_{\nu+1}}{2}$ et tel que tous les nombres entiers de l'intervalle $[t_{\nu+1}, t_\nu]$

soient contenus dans l'intervalle $[t_{\nu+1}+\varepsilon, t_\nu-\varepsilon]$. Alors d'après le lemme (2.1), nous avons la relation

$$\sum_{t_{\nu+1}\leq a\leq t_\nu}\frac{\varepsilon_k(\frac{x}{a})}{a}=\int_{t_{\nu+1}+\varepsilon}^{t_\nu-\varepsilon}\frac{\varepsilon(\frac{x}{a})}{t}dt-\int_{t_{\nu+1}+\varepsilon}^{t_\nu-\varepsilon}(t-[t]-\frac{1}{2})\left[\frac{x\varepsilon_k'(\frac{x}{t})}{t^3}+\frac{\varepsilon(\frac{x}{t})}{t^2}\right]dt$$
$$+\frac{1}{t_{\nu+1}+\varepsilon}(t_{\nu+1}+\varepsilon-[t_{\nu+1}+\varepsilon]-\frac{1}{2})\ \varepsilon_k(\frac{x}{t_{\nu+1}+\varepsilon})$$
$$-\frac{1}{t_\nu-\varepsilon}(t_\nu-\varepsilon-[t_\nu-\varepsilon]-\frac{1}{2})\ \varepsilon_k(\frac{x}{t_\nu-\varepsilon}).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{t_{\nu+1}\leq a\leq t_\nu}\frac{\varepsilon_k(\frac{x}{a})}{a} &= \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu}\frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t}dt-x\int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu}(t'-[t]-\frac{1}{2})\frac{\varepsilon'(\frac{x}{t})}{t^3}dt-\int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu}(t-[t]-\frac{1}{2})\ \frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t^2}dt\\ &+ \frac{1}{t_{\nu+1}}(t_{\nu+1}-[t_{\nu+1}]-\frac{1}{2})\ \varepsilon_k(\nu+1)-\frac{1}{t_\nu}(t_\nu-[t_\nu]-\frac{1}{2})\ \varepsilon_k(\nu)\\ &- \frac{1}{t_{\nu+1}}(t_{\nu+1}-[t_{\nu+1}]-\frac{1}{2})\frac{d_k(\nu+1)}{\nu+1}\end{aligned}$$

où nous utilisons le fait que $E_k(x)$ étant continue à gauche, il en est de même de $\varepsilon_k(x)$, donc

$$\begin{aligned}\varepsilon_k(\nu) &= \varepsilon_k(\frac{x}{t_\nu})=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon_k(\frac{x}{t_\nu-\varepsilon})\\ \text{et}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon_k(\frac{x}{t_{\nu+1}+\varepsilon}) &= \lim_{\substack{c\to\nu+1\\ c<\nu+1}}E_k(c)-Q_k(Log(\nu+1))\\ &= E_k(\nu)-Q_k(Log(\nu+1))=\varepsilon_k(\nu+1)\frac{d_k(\nu+1)}{\nu+1}\end{aligned}.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\sum_{t_m\leq a\leq t_N}\frac{\varepsilon_k(\frac{x}{a})}{a} &= \int_{t_m}^{t_N}\frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t}dt-x\int_{t_m}^{t_N}(t-[t]-\frac{1}{2})\ \frac{\varepsilon'(\frac{x}{t})}{t^3}dt\\ &- \int_{t_m}^{t_N}(t-[t]-\frac{1}{2})\ \frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t^2}dt-\frac{1}{t_N}\ (t_N-[t_N]-\frac{1}{2})\varepsilon_k(N)\\ &+ \frac{1}{t_m}\ (t_m-[m]-\frac{1}{2})\ \varepsilon_k(m)\\ &- \sum_{N\leq\nu<m}\frac{1}{t_\nu}\ (t_\nu-[t_\nu]-\frac{1}{2})\ \frac{d_k(\nu)}{\nu}\end{aligned}.$$

En prenant $t_{m+1}=c<1$, et $t_{N+1}=\sqrt{x}$, on a des relations similaires à (*) pour $\nu=m$ et $\nu=N$, on a donc en définitive (en faisant tendre c vers 1) :

$$\begin{aligned}I_4=\sum_{1\leq a\leq\sqrt{x}}\frac{\varepsilon_k(\frac{x}{a})}{a} &= \int_1^{\sqrt{x}}\frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t}\ dt-x\int_1^{\sqrt{x}}(t-[t]-\frac{1}{2})\frac{\varepsilon_k'(\frac{x}{t})}{t^3}\ dt\\ &- \int_1^{\sqrt{x}}(t-[t]-\frac{1}{2})\frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t^2}\ dt-\frac{1}{\sqrt{x}}(x-[x]-\frac{1}{2})\ \varepsilon_k(\sqrt{x})\\ &- \frac{1}{2}\ \varepsilon_k(x)-\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\frac{1}{t_\nu}\ (t_\nu-[t_\nu]-\frac{1}{2})\ \frac{d_k(\nu)}{\nu}\end{aligned}$$

On a $\varepsilon_k(x)=O\left(\frac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right)$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}\ (x-[x]-\frac{1}{2})\ \varepsilon_k(\sqrt{x})=O\left(\frac{(Log\ x)^{k-1}}{x^{3/4}}\right)$.

D'autre part $\int_1^{\sqrt{x}}(t-[t]-\frac{1}{2})\frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t^2}\ dt=O\left(\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\varphi_k(\frac{x}{t})}{t^2}\ dt\right)$

où $\varphi_k(x) = \dfrac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\varphi_k(\frac{x}{t})}{t^2}\ dt = \frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^{x} \varphi_k(u)\ du = O\left(\frac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right).$

On en conclut donc que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} (t-[t]-\frac{1}{2})\ \frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t^2}\ dt = O\left(\frac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right).$

2.2) De même comme $E_k(x)$ est une fonction en escalier, $E'_k(x) = 0$ sauf pour $x \in \mathbb{N}$, on en déduit donc que $\varepsilon'_k(x) = -\dfrac{1}{2}\ Q'_k(Log\ x)$ sauf pour $x \in \mathbb{N}$.

On en déduit donc que

$$x\int (t-[t]-\frac{1}{2})\ \frac{\varepsilon'_k(\frac{x}{t})}{t^3}\ dt = -\int_1^{\sqrt{x}} (t-[t]-\frac{1}{2})\ \frac{Q'_k(Log(\frac{x}{t}))}{t^2}\ dt.$$

Mais $Q'_k(Log(\frac{x}{t})) = \displaystyle\sum_{1\le \ell \le k-1} Re(Log\ t)(Log\ x)^{\ell}$ où $R_\ell(X)$ est un polynôme de degré $\le k-1-\ell$. Posons $a_\ell = \displaystyle\int_1^{+\infty} (t-[t]-\frac{1}{2})\ \frac{R_\ell(Log\ t)}{t^2}\ dt$ (l'intégrale étant convergente, on en déduit donc que

$$\begin{aligned} x\int_1^{\sqrt{x}} (t-[t]-\frac{1}{2})\frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t^3}\ dt &= \sum_{1\le \ell\le k-1} a_\ell (Log\ x)^{\ell} \\ &+ \sum_{1\le \ell\le k-1} O((Log\ x)^{\ell} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{(Log\ t)^{k-1-\ell}}{t^2}\ dt) \\ &= H_k(Log\ x) + O\left(\frac{(Log\ x)^k}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

où $H_k(X)$ est un polynôme de degré $\le k-1$. Nous avons donc finalement

$$I_4 = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t}\ dt + H_k(Log\ x) + O\left(\frac{(Log\ x)^k}{\sqrt{x}}\right)$$
$$+ \sum_{\sqrt{x}\le\nu\le x} \frac{1}{t_\nu}\ (t_\nu - [t_\nu] - \frac{1}{2})\ \frac{d_k(\nu)}{\nu}.$$

Mais on a $t_\nu = \dfrac{x}{\nu}$, donc $\displaystyle\sum_{\sqrt{x}\le\nu\le x} \frac{1}{t_\nu}\ (t_\nu - [t_\nu] - \frac{1}{2})\ \frac{d_k(\nu)}{\nu}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\sqrt{x}\le\nu\le x} \nu(\frac{x}{\nu} - [\frac{x}{\nu}] - \frac{1}{2})(E_k(\nu) - E_k(\nu-1))$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{\sqrt{x}\le\nu\le x} \nu(\frac{x}{\nu} - [\frac{x}{\nu}] - \frac{1}{2})(Q_k(\nu) - Q_k(\nu-1)) + \frac{1}{x} O\left(\sum_{\sqrt{x}\le\nu\le x} \nu(\varepsilon_k(\nu) - \varepsilon_k(\nu-1)\right)$$

or

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{x}\le\nu\le x} \nu(\varepsilon_k(\nu) - \varepsilon_k(\nu-1)) &= -\sum_{\nu\le[x]} \varepsilon_k(\nu-1) + [x]\ \varepsilon_k([x]) \\ &+ ([\sqrt{x}]+1)\ \varepsilon_k([\sqrt{x}]+1) \end{aligned}$$

donc $\displaystyle\frac{1}{x} \sum_{\sqrt{x}\le\nu\le x} \nu(\varepsilon_k(\nu) - \varepsilon_k(\nu-1)) = -\frac{1}{x} \sum_{\sqrt{x}\le\nu\le x} \varepsilon_k(\nu-1) + O\left(\frac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right)$

de même en posant $\varphi_k(x) = \dfrac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x}}$

$$\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\varepsilon_k(\nu-1)=O\left(\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\varphi_k(\nu-1)\right).$$

Comme $\varphi_k(x)$ est décroissante pour $x\geq e^{2(k-1}$, en prenant $x\geq e^{2(k-1)}$, on a d'après le lemme (2.2)

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\varphi_k(\nu-1) &= \int_{\sqrt{x-1}}^{x-1}\left(\frac{(Log\ t)^{k-1}}{\sqrt{t}}\right)dt+O\left(\frac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x^1/4}}\right)\\ &= O(\sqrt{x}(Log\ x)^{k-1})\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\frac{1}{x}\ O\left(\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\nu(\varepsilon_k(\nu)-\varepsilon_k(\nu-1))\right)=O\left(\frac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right).$

On en conclut donc que :

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\frac{1}{t_\nu}(t_\nu-[t_\nu]-\frac{1}{2})\frac{d_k(\nu)}{\nu} &= \sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\frac{\nu}{x}(\frac{x}{\nu}-[\frac{x}{\nu}]-\frac{1}{2})(Q_k(Log\nu)-Q_k(Log(\nu-1))\\ &+ O\left(\frac{(Log\ x)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right)\end{aligned}$$

2.3) Comme $Log(x-1)=Log\ x-\dfrac{1}{x}+O(\dfrac{1}{x^2})$, on en conclut que

$Q_k(Log\ \nu)-Q_k(Log(\nu-1))=\dfrac{M_k(Log\ \nu)}{\nu}+O\left(\dfrac{(Log\ \nu)^{k-1}}{\nu^2}\right)$ où $M_k(X)$ est un polynôme de degré $\leq k-1$

$$\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\frac{\nu}{x}(\frac{x}{\nu}-[\frac{x}{\nu}]-\frac{1}{2})(Q_k(Log\nu)-Q_k(Log(\nu-1))$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}(\frac{x}{\nu}-[\frac{x}{\nu}]-(\frac{1}{2})\ M_k(Log\ \nu)+\frac{1}{x}\ O\left(\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\frac{(Log\nu)^{k-1}}{\nu}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}(\frac{x}{\nu}-[\frac{x}{\nu}]-\frac{1}{2})\ M_k(Log\ \nu)+O\left(\frac{(Log\ x)^k}{x}\right)$$

d'après le lemme (2.3).

Posons $m_\nu=\left[\dfrac{x}{\nu}\right]+1$

$$M_k\left(Log\left(\frac{x}{m_\nu}\right)\right)=\sum_{\frac{x}{\nu}\leq n\leq m_\nu}M_k\left(Log\left(\frac{x}{n}\right)=\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}M_k\left(Log\left(\frac{x}{t}\right)dt\right.\right.$$

$$-\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}\left(t-[t]-\frac{1}{2}\right)M_k'\left(Log\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}+\left(\frac{x}{\nu}-\left[\frac{x}{\nu}\right]-\frac{1}{2}\right)M_k(Log\ \nu\right)+\frac{1}{2}M_k\left(Log\left(\frac{x}{m_\nu}\right)\right).$$

2.4) Nous aurons besoin de déterminer l'ordre de grandeur de la somme $J_\ell=\displaystyle\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}m_\nu(Logm_nu)^\ell$.

Comme la fonction $t\longrightarrow\left[\dfrac{x}{t}\right]+1$ est une fonction décroissante d'après le lemme (2), nous avons :

$$\begin{aligned}
J_\ell = \sum_{\sqrt{x}\le\nu\le x} m_\nu (Log m_n u)^\ell &= \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\left[\frac{x}{t}\right]+1\right)\left(Log\left(\left[\frac{x}{t}\right]+1\right)\right)^\ell dt + O(\sqrt{x}(Logx)^\ell)\\
&= x\int_1^{\sqrt{x}}([t]+1)(Log([t]+1))^\ell\frac{dt}{t^2}+O(\sqrt{x}(Logx)^\ell)\\
&= x\left[\sum_{1\le n\le\sqrt{x}}(n+1)Log(n+1)^\ell\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^2}\right]\\
&+ x\int_{\sqrt{[x]}}^{\sqrt{x}}([\sqrt{x}]+1)\ Log([\sqrt{x}]+1)^\ell\frac{dt}{t^2}+O(\sqrt{x}(Logx)^\ell)
\end{aligned}.$$

Comme sur l'intervalle $[\sqrt{x}],\sqrt{x},\ \frac{x}{t^2}\sim\frac{1}{x}$, l'intégrale du second membre est $O(\sqrt{x}(Logx)^\ell)$.

$$\begin{aligned}
J_\ell &= x\sum_{1\le n\le\sqrt{x}}\frac{(Log(n+1))^\ell}{n}+O(\sqrt{x}(Logx)^\ell)\\
&= x\sum_{1\le n\le\sqrt{x}}\frac{(Log(n+1))^\ell}{n+1}+x\sum_{1\le n\le\sqrt{x}}\frac{(Log(n+1))^\ell}{n(n+1)}+O(\sqrt{x}(Logx)^\ell)\\
&= x\left[\frac{(Log(\sqrt{x}+1))^{\ell+1}}{\ell+1}+\delta_\ell^1+\gamma_\ell\right]+C_\ell\, X+X\ O\left(\int_{\sqrt{x}^\infty}\frac{(Log\ t)^\ell}{t^2}\ dt\right)\\
&+ O(\sqrt{x}(Logx)^\ell)
\end{aligned}.$$

où $C_\ell=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(Log(n+1))^\ell}{n(n+1)}$ donc $J_\ell = x\left(\frac{(Log\ x)^{\ell+1}}{2^{\ell+1}(\ell+1)}\ +\ d_\ell\right)\ +\ O(\sqrt{x}(Logx)^\ell)$ où d_ℓ est un nombre réel.

Nous allons maintenant déterminer la somme $I_\ell=\sum_{\sqrt{x}\le n\le\sqrt{x}}(Log\ m_\nu)^\ell$. Puisque $t\to\left[\frac{x}{t}\right]+1$ est décroissante, on a :

$$\begin{aligned}
I_\ell &= \int_{\sqrt{x}}^{x}(Log(\left[\frac{x}{t}\right]+1))^\ell\ dt\ +\ O((Log\ x)^\ell)\\
&= x\int_1^{\sqrt{x}}(Log([t]\ +\ 1))^\ell\ \frac{dt}{t^2}\ +\ O((Log\ x)^\ell)\\
&= x\sum_{1\le n\le\sqrt{x}}(Log(n+1))^\ell\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^2}+O((Log\ x)^\ell)\\
&= x\sum_{1\le n\le\sqrt{x}}\frac{(Log(n+1))^{\ell+1}}{n(n+1)}\\
&= C_\ell\, x+x\ O\left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{(Log\ t)^\ell}{t^2}\ dt\right)+O((Log\ x)^\ell)
\end{aligned}$$

où $C_\ell\ x+O(\sqrt{x}(Log\ x)^{\ell+1})$.

2.5) On en déduit donc que $M_k(Log\frac{x}{m_\nu})=x\ W_k(Log\ x)+O(\sqrt{x}(Log\ x)^k)$ où $W_k(X)$ est un polynôme de degré $k-1$, puisque $M_k(X)$ est un polynôme de degré $k-1$.

2.6) Revenons maintenant à la relation (**) qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq}(\frac{x}{\nu}-[\frac{x}{\nu}]-(\frac{1}{2})\,M_k(Log\,\nu) &= \frac{1}{2x}\,M_k(Log(\frac{x}{m_\nu}))\\ &+\ \frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu} M_k(Log(\frac{x}{m_\nu}))\,dt\\ &-\ \frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}(t-[t]-\frac{1}{2})\,M'_k(Log(\frac{x}{t}))\,\frac{dt}{t}\end{aligned}.$$

D'après le résultat établi dans la partie (III 2.4), on a donc la relation

$$\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq}(\frac{x}{\nu}-[\frac{x}{\nu}]-(\frac{1}{2})\,W_k(Log\,\nu)=\frac{1}{2x}\,M_k(Log(\frac{x}{m_\nu})$$
$$+\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}M_k(Log(\frac{x}{t}))\,dt-\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}(t-[t]-\frac{1}{2})\,M'_k(Log(\frac{x}{t}))\,dt$$
$$+O\left(\frac{(Log\,x)^k}{\sqrt{x}}\right).$$

2.7) Nous allons maintenant calculer l'expression

$$\phi(x)=\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq}\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}(t-[t]-\frac{1}{2})\,M'_k(Log(\frac{x}{t}))\,\frac{dt}{t}.$$

Comme $M_k(X)$ est un polynôme de degré $k-1$, $M'_k(Log(\frac{x}{t}))=\sum_{0\leq\ell\leq k-2}Q'_\ell(Log\,t)(Log\,x)^\ell$ où $Q'_\ell(X)$ est un polynôme de degré $\leq k-2-\ell$ dérivée d'un polynôme $Q_\ell(X)$ de degré $\leq k-1-\ell$. Comme $[t]=m_\nu-1$ sur l'intervalle $\left[\frac{x}{\nu},m_\nu\right]$, on en déduit que :

$$\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}(t-[t]-\frac{1}{2})\,M'_k(Log(\frac{x}{t}))\,\frac{dt}{t}=\sum_{0\leq\ell\leq k-2}(Log\,x)^\ell\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}(t-m_\nu-\frac{3}{2})\,Q'_\ell(Log\,t)\,\frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{\nu,\ell}(x)=\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}(t-m_\nu-\frac{3}{2})\,Q'_\ell(Log\,t)\,\frac{dt}{t} &= \Big[(t-m_\nu-\tfrac{3}{2})\,Q_\ell(Log\,t)\Big]_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}\\ &-\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}Q_\ell(Logt)dt-\frac{3}{2}Q_\ell(Logm_\nu)-\frac{x}{\nu}Q_\ell(Log(\frac{x}{\nu}))\\ &+(m_\nu+\frac{3}{2})Q_\ell(Log(\frac{x}{\nu}))\Big[t\tilde{Q}_\ell(Logt)\Big]_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu}\end{aligned}$$

où $\tilde{Q}_\ell(X)$ est un polynôme de degré $\leq k-1-\ell$.

$$\begin{aligned}\Phi_{\nu,\ell} = &\ \frac{x}{\nu}\left[\tilde{Q}_\ell\left((Log(\frac{x}{\nu})\right)\right]-m_\nu\,\tilde{Q}_\ell(Log(m_\nu))-\frac{3}{2}\,Q_\ell(Log\,m_\nu))+\\ &m_\nu\,Q_\ell(Log(\tfrac{x}{\nu}))+\frac{3}{2}Q_\ell(Log(\frac{x}{\nu}))\end{aligned}$$

$$\phi(x)=\ \sum_{0\leq\ell\leq k-2}\left(\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\phi_{\nu,\ell}(x)\right)\left(Logx\right)^\ell$$

2.7.1) D'après le lemme (2.3) $\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}\frac{x}{\nu}\left[\tilde{Q}_\ell(Log(\frac{x}{\nu})-Q_\ell(Log\left(\frac{x}{\nu}\right))\right]=x\ G_\ell^{(1)}(Log\ x)+O(\sqrt{x}(Logx)^{k-2-\ell})$ où $G_\ell^{(1)}(X)$ est un polynôme de degré $\leq k-\ell$.

2.7.2) Comme $\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x}(Log\nu)^\ell=x\ T_\ell(Logx)+O(\sqrt{x}(Log\ x)^\ell)$ où $T_\ell(X)$ est un polynôme de degré ℓ, on en déduit que

$$\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} Q_\ell\left(Log\frac{x}{\nu}\right) = x\, G_\ell^{(2)}(Log\ x) + O(\sqrt{x}(Logx)^{k-1-\ell})$$

où $T_\ell(X)$ est un polynôme de degré ℓ, on en déduit que

$$\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} Q_\ell(Log\frac{x}{\nu}) = xG_\ell^{(2)}\ (Logx) + O(\sqrt{x}(Log\ x)^{k-1-\ell})$$

où $G_\ell^{(2)}(X)$ est un polynôme de degré $\leq k-1-\ell$.
2.7.3) D'autre part d'après les résultats de la partie ( )

$$\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} m_\nu \tilde{Q}_\ell(Logm_\nu) = x\, G_\ell^{(3)}(Logx) + O(\sqrt{x}(Logx)^{k-\ell})$$

et

$$\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} Q_\ell(Logm_\nu) = cx + O(\sqrt{x}(Logx)^{k-\ell})$$

où $G_\ell^{(3)}$ est un polynôme de degré $k-\ell$ et c est une constante.
2.7.4) Il nous reste maintenant à calculer $\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} m_\nu Q_\ell\left(\frac{x}{\nu}\right)$.

La fonction $t \longrightarrow \left(\left[\frac{x}{t}\right]+1\right)\left(Log\left(\frac{x}{t}\right)\right)^3$ est une fonction de croissante, donc d'après le lemme (2.2) on a :

$$\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} m_\nu\ Q_\ell(Log\left(\frac{x}{t}\right)\Big) = \int_{\sqrt{x}^x}\left[\frac{x}{t}\right]+1\Big)\ Q_\ell(Log(\frac{x}{t}\Big)\ dt$$

$$+O(\sqrt{x}(Logx)^{k-1-\ell})$$

$$= x\int^{\sqrt{x}_1}([t]+1)\ Q_\ell(Log\ t)\ \frac{dt}{t^2} + O(\sqrt{x}(Logx)^{k-1-\ell})$$

$$= x\sum_{1\leq n\leq\sqrt{x}}(n+1)\left[\frac{A_\ell(Logt)}{t}\right]_n^{n+1} + O(\sqrt{x}(Logx)^{k-1-\ell})$$

où $A_\ell(X)$ est un polynôme de degré $k-1-\ell$

$$(n+1)\left[\frac{A_\ell(Logt)}{t}\right]_n^{n+1} = A_\ell(Log(n+1)) - A_\ell(Logn) - \frac{A_\ell(Logn)}{n}$$

comme $Log(n+1) = Logn + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, on en déduit que

$$(n+1)\left[\frac{A_\ell(Logt)}{t}\right]_n^{n+1} = \frac{\tilde{A}_\ell(Logx)}{n} + C_{n,\ell}$$

où $\tilde{A}_\ell(X)$ est un polynôme de degré $\leq k-1-\ell$ et $C_{n,\ell} = O\left(\frac{(Logn)}{n^2}\right)^{k-1-\ell}$.

Donc $\sum_{1\leq n\leq\sqrt{x}} (n+1) \left[\frac{A_\ell(Logt)}{t}\right]_n^{n+1} = \bar{G}_\ell^(3)(Logx) + \sum_{1\leq n\leq\sqrt{x}} d_{x,\ell} + O\left(\frac{(Logx)^{k-1-\ell}}{\sqrt{x}}\right)$.

Mais $\sum_{1\leq n\leq\sqrt{x}} d_{n,\ell} = d + O\left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{(Logt)^{k-1-\ell}}{t^2}\right) + O\left(\frac{(Logx)^{k-1-\ell}}{\sqrt{x}}\right)$

$= d_\ell + O\left(\frac{(Logx)^{k-1-\ell}}{\sqrt{x}}\right)$ où $d_\ell = \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n,\ell} \in \mathbb{R}$.

Par conséquent $\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} m_\nu\ Q_\ell(Log\frac{x}{\nu})) = x\ \tilde{G}_\ell^{(3)}(Logx) + O(\sqrt{x}\ (Logx)^{k-\ell})$ où $\tilde{G}_\ell^{(3)}(X) = \bar{G}^{(3)}(X) + d$

On en conclut donc que $\phi(x) = \frac{1}{x}\int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu} (t-[t]-\frac{1}{2})\ M'_k(Log(\frac{x}{t}))\ \frac{dt}{t} = G_k(Logx) + O(\frac{(Logx)^k}{\sqrt{x}}$

où $G_k(X)$ est un polynôme de degré $\leq k$.

2.8) Enfin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} \quad & \sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} \int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu} M_k(Log\frac{x}{t}))\ dt \\
= \quad & \sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} \int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu} M_k(Log\ u)\frac{du}{u^2} \\
= \quad & \sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} \left[\frac{N_k(Logu)}{u}\right]_{\frac{x}{\nu}}^{\nu}
\end{aligned}$$

où $N_k(X)$ est un polynôme de degré k.

$$\left[\frac{N_k(Logu)}{u}\right]_{\frac{x}{\nu}}^{\nu} = \frac{N_k(Log\nu)}{\nu} - \frac{m_\nu\ N_k(Log(\frac{x}{m_\nu})}{x}$$

D'après le résultat établi dans la partie (III.2.4) et le lemme (2), il existe donc un polynôme $V_k(X)$ de degré $\leq k+1$ tel que donc :

$$\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}\leq\nu\leq x} \int_{\frac{x}{\nu}}^{m_\nu} M_k(Log\frac{x}{t})) = V_k(Logx) +\ O\left(\frac{(Logx)^k}{\sqrt{x}}\right).$$

2.9) On a donc finalement $I_4 = F_k(Logx) + O\left(\frac{(Logx)^k}{\sqrt{x}}\right) + \int_1^{\sqrt{x}} + \frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t}\ dt$ où $F_k(X)$ est un polynôme de degré $\leq k-1$.

Calculons maintenant la somme $I'_3 = I_3 + \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\varepsilon_k(\frac{x}{t})}{t}\ dt = \sum_{1\leq a\leq\sqrt{x}} \frac{\varepsilon_k(a)}{a} + \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\varepsilon_k(u)}{u}\ du.$

Comme $E_k(x)$ est une fonction en escalier, $E'_k(x) = 0$ sauf aux points $x \in \mathbb{N}$. Par conséquent $\varepsilon'_k(x) = -\frac{1}{x}\ Q'_k(Logx)$. Donc $\varepsilon'_k(x) < 0$ pour $x \notin \mathbb{N}$ suffisamment grand puisque le coefficient dominant de $Q_k(X)$ est nécessairement positif étant donné que $E_k(x) = Q_k(Logx) + O\left(\frac{(Logx)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right)$. En prenant x suffisamment grand pour que $\varepsilon'_k(u) < 0$ su $u \geq \sqrt{x}$ et $u \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\varepsilon_k(u)$ est décroissante sur $[x, x+1[$ si $x \geq \sqrt{x}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k(u)$ étant continue à gauche en tout point. On a donc la relation

$$\frac{\varepsilon_k(n)}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{\varepsilon_k(u)}{u} \geq \frac{\varepsilon_k(n+1-0)}{n+1}$$

Or

$$\varepsilon_k(n+\varepsilon) - \varepsilon_k(n-\varepsilon) = E_k(n+\varepsilon) - E_k(n-\varepsilon) - [Q_k(Log(n+\varepsilon)) - Q_k(Log(n-\varepsilon))]$$

donc $\varepsilon_k(x) - \varepsilon_k(n-0) = E_k(n) - E_k(n-1) = Q_k(Log(n)) - Q_k(Log(x-1))$

$+O\left(\frac{(Logx)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right) = O\left(\frac{(Logx)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right)$.
On en déduit donc la relation

$$\frac{\varepsilon_k(n)}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{\varepsilon_k(u)}{u}\, du \geq \frac{\varepsilon_k(n+1-0)}{n+1} = \frac{\varepsilon_k(n+1)}{n+1}\, O\left(\frac{(Logx)^{k-1}}{n^{3/2}}\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} I_3' &= \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} \frac{\varepsilon_k(a)}{a} + \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\varepsilon_k(\frac{u}{t})}{t} \\ &= \sum_{1 \leq a \leq x} \frac{\varepsilon_k(a)}{a} + O\left(\frac{(Logx)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

et comme la série $\sum \frac{\varepsilon_k(n)}{n}$ est convergente puisque $\varepsilon_k(n) = O\left(\frac{(Logn)^{k-1}}{\sqrt{n}}\right)$, on en déduit donc que $I_3' = \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k(n)}{n} = C_k$ donc $I_3' = C_k - \sum_{x \leq a \leq +\infty}$ $\frac{\varepsilon_k(a)}{a} + O\left(\frac{(Logx)^{k-1}}{\sqrt{x}}\right)$ et comme $\frac{\varepsilon_k(a)}{a} = O\left(\frac{(Loga)^{k-1}}{\sqrt{a}^{3/2}}\right)$, on a également $\sum_{x \leq a \leq +\infty} \frac{\varepsilon_k(a)}{a} =$ $O\left(\frac{(Logx)^{k-1}}{\sqrt{x}^{k-1}}\right)$, donc $I_3' = C_k + O\left(\frac{(Logx)^{k-1}}{\sqrt{x}^{k-1}}\right)$,
$C_k \in \mathbb{R}$.

2.10) Calculons maintenant $I_2 = \sum_{x \leq a \leq \sqrt{x}} \frac{Q_k(Log(\frac{x}{a}))}{a}$.

Nous avons $Q_k(X) = \sum_{0 \leq \ell \leq k} a_\ell X^\ell$, $a_\ell \in \mathbb{R}$ et $a_k > 0$

$Q_k(Log(\frac{x}{a})) = \sum_{0 \leq \ell \leq k} a_\ell \sum_{r+s=\ell} C_\ell^s (-1)^s (Logx)^r (Loga)^s$

donc $I_2 = \sum_{0 \leq \ell \leq k} a_\ell \sum_{r+s=\ell} C_\ell^s (-1)^s (Logx)^r (Loga)^s \sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} (\frac{(Loga)^s}{a})$.

Mais d'après le lemme (2.3) $\sum_{1 \leq a \leq \sqrt{x}} \frac{(Loga)^s}{a} = \frac{1}{s+1}(Log\sqrt{x})^{s+1} + \gamma_s + O\left(\frac{(Log\sqrt{x})^s}{\sqrt{x}}\right) =$ $\frac{1}{2^{s+1}(x+1)}(Logx)^s + \gamma_s + O\left(\frac{(Logx)^s}{\sqrt{x}}\right)$.

On en conclut donc que

$$I_2 = \sum_{0\leq \ell \leq k+1} C_\ell (Logx)^\ell + O\left(\frac{(Logx)^k}{\sqrt{x}}\right)$$

où les C_i sont des nombres réels.
De même $I_1 = \sum_{1\leq a\leq \sqrt{x}} \frac{Q_k(Loga)}{a} = \sum_{0\leq \ell\leq k+1} C_\ell(Logx)$ où les C_ℓ sont des nombres réels.

On en déduit donc que $S_i + S_i' = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = B_k(Logx) + O\left(\frac{(Logx)^k}{\sqrt{x}}\right)$ où $B_k(X)$ est un polynôme de degré $\leq k+1$.

Par conséquent $E_{k+1}(x) = \sum_{1\leq i\leq k+1} (S_i + S_i') = Q_{k+1}(Logx) + O\left(\frac{(Logx)^k}{\sqrt{x}}\right)$ où $Q_{k+1}(X) = (k+1)\ B_k(X)$ est un polynôme de degré $\leq k+1$.
3) D'après le raisonnement fait dans la partie III), nous avons également $D_{k+1}(x) = x\,P_{k+1}(Logx) + O(\sqrt{x}(Logx)^k)$ avec $1 + deg(P_{k+1}) \leq deg(Q_{k+1})$, et comme d'après ([2] 12.1.4 Chap. XII), on a également $D_{k+1}(x) = x\ \bar{P}_{k+1}(Logx) + O(x^{\frac{k-1}{k}})$, avec $1 + deg(\bar{P}_{k+1}) = k+1$. Nous en concluons que $deg(\bar{P}_{k+1}) = deg(P_{k+1})$, donc $deg(Q_{k+1}) \geq 1 + deg(P_{k+1}) = 1 + deg(\bar{P}_{k+1}) = k+1$, ce qui implique que $deg(Q_{k+1}) = k+1$.
Ce qui termine la démonstration du lemme (2.4). □

DEMONSTRATION DE L'HYPOTHESE DE LINDELÖF :
Soit un entier ≥ 2. Alors d'après le lemme précédent $\Delta_k(x) = D_k(x) - x\,P_k(Logx) = O(\sqrt{x}(Logx)^{k-1})$.
Donc si α_k désigne le plus petit nombre réel α tel que $\Delta_k(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon})$ quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $\alpha_k \leq \frac{1}{2}$. D'après ([2] 13.4) cette relation implique l'hypothèse de LINDELÖF.
Les conséquences suivantes de l'hypothèse de LINDELÖF sont données dans ([2] Chap. IX et XIII).
Soit k un entier ≥ 2 et β_k la borne inférieure des nombres réels β tels que $\frac{1}{x}\int_0^x \Delta_k^2(y)\,dy = O(x^{\beta+\varepsilon})$ pour tout nombre réel positif ε.

Corollaire 2.5. $\beta_k = \frac{k-1}{2k}$.

Corollaire 2.6. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2} = \int_0^{+\infty} \Delta_k^2(x)\ x^{-2\sigma-1}\ dx < +\infty$ *quel que soit* $\sigma > \beta_k = \frac{k-1}{2k}$.

Corollaire 2.7. *1)* $\frac{1}{T}\int_1^T [\zeta(\frac{1}{2}+it)|^{2k}\,dt = O(T^\varepsilon)\ \ (k = 1,2,3...)$.
2) $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}}\ \ (\sigma > \frac{1}{2}\ ;\ k = 1,2,3...)$

Corollaire 2.8. *Pour tout* $\sigma > \frac{1}{2}, N(\sigma, T+1) - N(\sigma, T) = o(LogT)$.

Corollaire 2.9. $S(t) = o(Logt)$ *et* $S_1(t) = o(Logt)$.

Corollaire 2.10. *Pour tout entier* $k > 0$ *et tout* $\sigma > \frac{1}{2}$, $\zeta^k(s) = \sum_{1 \leq n \leq t^\delta} \frac{d_k(n)}{n^s} + O(|t|^{-\lambda})$ $(t > 0)$.
où δ *est un nombre réel positif quelconque* < 1 *et* $\lambda = \lambda(k, \delta, \sigma) > 0$.

Corollaire 2.11. $N(\sigma, T) = O(t^{2(1-\sigma)+\varepsilon})$ *uniformément pour* $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

Références

[1] H. DAVENPORT, *Multiplicative number theory. Lectures in advanced Mathematics n°1*, MARKHAM PUBLISHING COMPANY, CHICAGO, 1967.

[2] E. C. TITCHMARSH, *The theory of Rieman zeta-function*, Oxford University Press, London, 1951 ; 2^{nd} edition revised by HEATH-BROWN, OXFORD SCIENCE PUBLICATION (1986).