African Diaspora Journal of Mathematics ISSN 1539-854X
Volume 10, Number 1, pp. 87–121 (2010) www.math-res-pub.org/adjm

LA CONJECTURE JACOBIENNE II

Hamet Seydi*
Département de Mathématiques et d'Informatique
Faculté des Sciences et Techniques
Université Cheikh Anta Diop
Dakar-Fann (SENEGAL)
et
Institut de Recherches en Sciences Mathématiques Benjamin Banneker
Université Polytechnique de l'Ouest Africain
Dakar-Almadies (SENEGAL)

En Hommage aux Professeurs Alexandre GROTHENDIECK à l'occasion de son quatre vingt unième anniversaire, et Pierre SAMUEL à l'occasion de son quatre vingt huitième anniversaire.

Résumé

L'objet de cet article est d'établir les résultats suivants :

Théorème (I) (CONJECTURE JACOBIENNE)
Soient K un corps de caractéristique 0, $A = K[T_1,...,T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur K et $f_1,...,f_n$ n éléments de A. On suppose que $dét(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante non nulle de K. Alors l'injection canonique $K[f_1,...,f_n] \longrightarrow K[T_1,...,T_n]$ est un isomorphisme.
Théorème (II) (CONJECTURE JACOBIENNE GENERALISEE)
Soient R un anneau intègre, $A = R[T_1,...,T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur R, et $f_1,...,f_n$ n éléments de A. On suppose que dét$(\partial\ f_i/\partial T_j)$ est un élément inversible de R. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
1) L'injection canonique $R[f_1,...,f_n] \longrightarrow R[T_1,...,T_n]$ est un isomorphisme.
2) Le degré de l'extension du corps des fractions de $A = R[T_1,...,T_n]$ sur celui de $B = R[f_1,...,f_n]$ n'est pas divisible par la caractéristique du corps des fractions de R.

AMS Subject Classification : 14-XX

Keywords : Algebraic Geometry

1 Introduction

Le Professeur K. ADJAMAGBO nous a signalé que le théorème de G. FISCHER sur lequel nous avons basé la démonstration du théorème 1 de [11] est peut-être faux. Ce qui mettrait en cause cette démonstration. En réalité nous nous sommes appuyé sur ce résultat

*E-mail address : hseydi@ucad.sn, hseydi@gmail.com

de G. FISCHER pour prouver que $U = X$ compte tenu du lemme 2 de [17]. Mais le fait que $U = X$ découle aussi de ([10]) qui dit qu'un endomorphisme de variété algébrique sur un corps algébriquement clos est surjectif. Nous pouvons donc reprendre la démonstration du théorème 1 de [10] comme suit :
Soient $X = \mathbb{C}^n$ muni de la topologie de ZARISKI, X' la variété analytique associée à X, $f : X \longrightarrow X$ définie par

$$f(\alpha_1,...,\alpha_n) = (f_1(\alpha_1,...,\alpha_n),...,f_n(\alpha_1,...,\alpha_n)), f' : X' \longrightarrow X'$$

l'endomorphisme de variété analytique complexe associé à f. Alors le fait que dét$(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante non nulle de $\mathbb{C}$ implique que f est un morphisme étale ([1] Cor 1.4), donc f' est un morphisme étale de variétés analytiques complexes, autrement dit f' est un isomorphisme local de variétés analytiques complexes. En outre f (et par conséquent f') est surjectif d'après ([7]). Donc $f' : X' \longrightarrow X'$ est un revêtement fini nécessairement galoisien. Comme X' est simplement connexe, on en conclut que f' est bijectif. Il existe d'autre part deux recouvrements ouverts (U_α) et (V_α), $\alpha \in \Lambda$, de X' tels que $V_\alpha = f'(U_\alpha)$ quel que soit $\alpha \in \Lambda$ et $f'_\alpha = f'|U_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ est un isomorphisme de variétés analytiques complexes. Par conséquent $g'_\alpha : g'|V_\alpha : V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ où $g' = f'^{-1}$ est aussi un isomorphisme de variétés analytiques complexes. On en déduit donc que g' est un morphisme de variétés analytiques complexes. Ce qui implique que f' est un isomorphisme de variétés analytiques complexes, et d'après SERRE ([15] Prop. 9) que f est un isomorphisme de variétés algébriques complexes. On en conclut donc que l'injection canonique $u : \mathbb{C}[f_1,...,f_n] \longrightarrow \mathbb{C}[T_1,...,T_n]$ est un isomorphisme, donc l'injectif canonique $u_o : K[f_1,...,f_n] \longrightarrow K[T_1,...,T_n]$ est un isomorphisme, puisque $u = u_o \otimes id_{\mathbb{C}}$.
Dans la démonstration précédente, on a pas besoin d'invoquer le fait que $f' : X' \longrightarrow X'$ est un revêtement fini galoisien pour conclure que f' est bijectif. Il suffit d'invoquer le fait que $f : X' \longrightarrow X'$ est simplement un revêtement (Théorème 2.58), pour pouvoir conclure d'après ([4] Th. 25.1.5, Cor. 1) que f' est un homéomorphisme puisque X' est séparé, connexe par arcs et simplement connexe.
Les arguments que nous venons de développer pour prouver que f' est bijective permettent de voir que dans les énoncés des théorèmes 4 et 5 de [17], on doit remplacer l'hypothèse simplement connexe par normale irréductible, comme nous le montrons dans cet article (Corollaire 2.52)) d'une autre manière et dans un cadre plus général. C'est en remarquant que les hypothèses du théorème 4 de [17] ne permettent pas de conclure que le Professeur K. ADJAMAGBO a pensé que la faute incombe au théorème de G. FISHER, puisque nous avons affirmé dans la démonstration du théorème 4 de [17] que le raisonnement fait pour établir la conjecture jacobienne permet de prouver que f_{an} est un revêtement fini galoisien. Nous nous excusons donc auprès de G. FISHER pour avoir affirmé des choses inexactes qui ont fait penser que son théorème sur lequel, nous nous sommes appuyé pour démontrer la conjecture jacobienne pour les sous-corps du corps des complexes était peut-être faux. Nous venons peut-être par la même occasion de réhabiliter la démonstration en cause.

Nous tenons à remercier le Professeur K. ADJAMAGBO pour avoir attiré notre attention sur ce fait et nos avoir permis d'apporter les corrections nécessaires dans les énoncés des théorèmes 4 et 5 de [17]. Nous profitons de cette occasion pour signaler que le Professeur K. ADJAMAGBO semble avoir obtenu une autre démonstration de la conjecture

jacobienne.
Nous avons cependant établi dans cet article plusieurs résultats plus ou moins équivalents à la conjecture jacobienne et montré (Théorème 2.58) que pour un corps algébriquement clos Ω si $A=\Omega[T_1,...,T_n]$ est l'anneau des polynômes à n variables sur Ω et $f_1,...,f_n$ sont n éléments de A, le fait que le morphisme $f:\Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ de variétés algébriques sur Ω induit par $(f_1,...,f_n)$ soit localement injectif (où ce qui équivaut au même injectif) implique que dét$(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante non nulle de Ω. La réciproque est vraie lorsque Ω est de caractéristique 0. Ce qui n'est pas le cas lorsque Ω est de caractéristique $p>0$, comme on peut le voir sur l'exemple suivant où $f_i=T_i-T_i^p$ pour $1\leq i\leq n$, où dét$(\partial f_i/\partial T_j)=1$, et pour chaque point $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ de Ω^n il existe p^n point $x=(x_1,...,x_n$ de Ω^n tels que $f(x)=\alpha$. Ce qui prouve d'ailleurs que la Conjecture Jacobienne est fausse lorsqu'on suppose que le corps K est de caractéristique $p>0$. Mais la Conjecture Jacobienne est vraie pour tout corps K si on suppose en plus que le degré de l'extension du corps des fonctions rationnelles induites par $f=(f_1,...,f_n)$ n'et pas divisible par la caractéristique de K.

2 Démonstrations des Conjectures Jacobiennes

Lemme Fondamental :
Soient Ω un corps algébriquement clos, $A=\Omega[T_1,...,T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur Ω ; $f_1,...,f_n$ n éléments de $A, B=\Omega[f_1,...,f_n]$ et $\pi:\Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ le morphisme de variétés algébriques sur Ω défini par $f=(f_1,...,f_n)$. On suppose que dét$(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante no nulle de Ω. Alors ls conditions suivantes sont satisfaites :
1) A est un B-module libre de type fini de rang égal au degré de l'extension de corps des fractions de A sur celui de B.
2) Les fibres de π sont finies et le nombre d'éléments de chaque fibre est égal au rang du B-module A, c'est-à-dire au degré de l'extension du corps des fractions de A sur celui de B. En particulier si la fibre en un point y de Ω^n contient un seul élément, c'est-à-dire si π est injectif, alors $B=A$, donc π est un automorphisme de variété algébrique sur Ω.
La démonstration du lemme fondamental s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soient B un anneau noethérien intègre, $S=Spec(B)$, X un schéma intègre et $f:X\longrightarrow S$ un morphisme étale et surjectif. Alors $A=\Gamma(X,\underline{O}_X)$ est une B-algèbre finie. En particulier si X est affine, alors A est un B-module projectif de type fini.*

Démonstration. Pour prouver que A est une B-algèbre finie, il suffit de prouver que tout point s de S possède un voisinage ouvert affine $S_o=Spec(B_o)$ dans S tel que si $X_o=Spec(A_o)$ est l'image réciproque de S_o dans X, A_o soit une B_o-algèbre finie. Soit $x\in f^{-1}(s)\neq\emptyset$. Alors d'après ([12] ,Lemme 1), il existe un diagramme commutatif de schémas pointés :

$$\begin{tikzcd}
(Y,y) \arrow[r, "v"] & (X,x) \\
(S',s') \arrow[u, "g"] \arrow[r, "u"] & (S,s) \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd}$$

où $S' = Spec(A')$ et Y des schémas affines avec u et v étales et tel que $\Gamma(Y, \underline{O}_Y)$ soit un A'-module libre. Il est facile de voir que g est un morphisme étale et donc pour tout point générique η de Y, $k(\eta)$ est une extension finie de $k(g(\eta))$. Ce qui implique que $\Gamma(Y, \underline{O}_Y$ est un A'-module de type fini. On prendra pour $S_o = Spec(B_o)$ un voisinage ouvert affine de s contenu dans l'ouvert $u \circ g(Y)$. Soient alors $S'_o = Spec(A'_o)$ l'image réciproque de S_o dans S et Y_o l'image réciproque de S_o dans Y. Il est clair que $\Gamma(Y_o, \underline{O}_{Y_o})$ est un A'_o-module libre de type fini. On en conclut donc que $\underline{O}_{Y_o}$ est S'_o-pur d'après ([7] Th.3.3.5). Soit $s_o \in S_o$. Comme $u_o \circ g_o : Y_o \longrightarrow S_o$ est surjectif, où $U_o : S'_o \longrightarrow S_o$ et $g_o : Y_o \longrightarrow S'_o$ sont les morphismes induits par u et g respectivement, il existe donc $y_o \in Y_o$ tel que $s_o = u_o \circ g_o(y_o)$. Soient $s'_o = g_o(y_o)$ et $U_o = v(Y_o)$ qui est un ouvert de X_o. Soient $(\tilde{S}_o, \tilde{s}_o)$ et $(\tilde{S}'_o, \tilde{s}'_o)$ les henselivés de (S_o, s_o) et (S'_o, s'_o) respectivement et $\tilde{u}_o : (\tilde{S}'_o, \tilde{s}'_o) \longrightarrow (\tilde{S}_o, \tilde{s}_o)$ le morphisme d'espaces pointés induit par u_o. Soient $\tilde{U}_o = U_o\, {}_{X_{S_o}}\, \tilde{S}_o$, $\tilde{Y}_o = Y_o\, {}_{X_{S'_o}} \tilde{S}_o$ et $\tilde{x}$ un élément de $Ass(\underline{O}_{\tilde{U}_o}/\tilde{S}_o)$. Comme le morphisme $\tilde{Y}_o \longrightarrow \tilde{U}_o$ induit par u est surjectif, il existe $\tilde{y} \in \tilde{Y}_o$ dont l'image dans $\tilde{U}_o$ par ce morphisme est $\tilde{x}$. Les morphismes u et f étant étales, on en conclut que $\tilde{y}$ est un élément de $Ass(\underline{O}_{Y_o}/S'_o)$. Par conséquent, puisque $\underline{O}_{Y_o}$ est S'_o-pur, l'adhérence de $\{\tilde{y}\}$ dans $\tilde{Y}_o$ rencontre $Y_o \otimes k(s'_o)$. On en déduit donc que l'adhérence de $\{\bar{x}\}$ dans $\tilde{U}_o$ rencontre $U_o \otimes k(s_o)$. Ce qui implique donc que $\underline{O}_{\tilde{U}_o}$ est S_o-pur ; et comme le corps des fractions de A_o est une extension finie de celui de B_o, $\Gamma(U_o, O_{U_o})$ est une B_o-algèbre finie d'après ([12]). Mais comme X_o est intègre, alors $A_o = \Gamma(X_o, \underline{O}_{X_o})$ est une sous-B_o-algèbre de $\Gamma(U_o, O_{U_o})$, donc A_o est une B_o-algèbre finie puisque B_o est noethérien. Ce qui termine la démonstration du lemme (2.1).

$\square$

Démonstration du Lemme Fondamental

Le morphisme $\pi : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ est étale et c'est ausi un morphisme surjectif d'après ([10]). Par conséquent d'après le lemme 2.1, A est un B-module projectif de type fini. Or d'après un théorème de QUILLEN et SUSLIN, tout module projectif de type fini sur un anneau de polynômes à un nombre fini de variables sur un corps est un module libre sur cet anneau. Par conséquent A est un B-module libre de type fini et puisque le corps des fractions de A est une extension finie de celui de B,le rang de A sur B est égal au degré de cet extension. En outre si m désigne le degré de l'extension du corps des fractions de A sur celui de B, alors les fibres de π sont toutes isomorphes à $Spec(\Omega^m)$, donc les fibres sont finies et le nombre d'éléments de chaque fibre est égal à m.
En particulier si la fibre en un point y de Ω contient un seul élément, c'et-à-dire si $m = 1$, alors B et A ont le même corps des fractions et comme A est fidèlement plat sur A, on en conclut que $B = A$, donc π est un automorphisme de variété algébrique sur Ω.
(I.2) Pour établir que la condition 2) du lemme fondamental est satisfaite, on peut faire la raisonnement suivant :
Soient M un idéal maximal de $B, R = {}^hB_M$ le henselisé de l'anneau local B_m, $S = Spec(R)$ et $X = Spec(A \otimes_B R)$. Comme le couple (S, s) où s désigne le point fermé de S est henselien, il existe un voisinage étale affine de (X, x) où $x \in \pi^{-1}(s)$, soit (X', x') tel que $\Gamma(X', \underline{O}_{X'}$ soit un $\Gamma(S', \underline{O}_S$-module projectif d'après ([7]3.3.2). Ce qui est vrai pour tous les points de X au dessus de s qui sont en nombre fini. On peut donc supposer, en faisant au besoin la somme des X' correspondant aux différents points x de X au-dessus de s, que l'image de X' dans X contient tous les points de X au-dessus de s. Soit U un ouvert affine de X

contenant tous les points de X au-dessus de s et contenu dans l'image de X' dans X qui est ouvert dans X puisque X' est plat et de type fini sur X (cf Lemme (I3)). Notons U' l'image réciproque de U dans X'. Comme $\underline{O}_{X'}$ est S'-pur, $Ass(\underline{O}_{X'}/S')$ est formé de générisation de $\underline{O}_{X'} \otimes k(s') = \underline{O}_X \otimes k(s)$, on en conclut donc que $Ass(\underline{O}_{U'}/S')$ est formé de générisations de $\underline{O}_{X'} \otimes k(s') = \underline{O}_U \otimes k(s)$, donc $\underline{O}_U$ est pur le long de $\underline{O}_U \otimes k(s)$ et par conséquent $\underline{O}_U$ est S-pur (cf[7] 3.3.8). On en conclut donc d'après ([7] 3.3.5) que $\Gamma(U,\underline{O}_U)$ est un $\Gamma(S,\underline{O}_S$-module libre dont le rang est nécessairement égal au degré de l'extension du corps des fractions de A sur celui de B puisqu'il est égal à $rang_L(A \otimes_B L) = rang_K(A \otimes_B F)$ où L désigne le corps des fractions de R et F celui de B. Comme A est étale sur B, $rang_F(A \otimes_B F)$ est égal au nombre d'éléments de $Spec(A)$ qui sont au-dessus de M. On en conclut que toutes les fibres de π ont le même nombre d'éléments qui est égal au degré de l'extension du corps des fractions de A sur celui de B.
Dans la démonstration précédente, nous nous sommes appuyé sur le lemme suivant :

Lemme 2.2. *Soient X un schéma affine, U un ouvert de X et $x_1,\dots,x_n$ un nombre fini de points de X contenus dans U. Alors il existe un ouvert affine V de X contenu dans U et qui contient les points $x_1,\dots,x_n$.*

Démonstration. X est le spectre d'un anneau A et x_i correspond à un idéal premier P_i de A pour chaque entier i, $1 \leq i \leq n$. Si $P_k \subseteq P_\ell$, alors tout ouvert contenant x_ℓ contient x_k. On peut donc supposer qu'aucun de ces idéaux premiers ne contient l'un des autres. Posons $\mathcal{A}_i = \bigcap\limits_{j\neq i,\ 1\leq j\leq n} P_j$ et supposons que U ne soit pas affine. Alors $Z = X - U$ est un fermé non vide qui est défini par un idéal I de A qui n'est contenu dans aucun des $P_i, 1 \leq i \leq n$. On en conclut donc que pour chaque entier $i, 1 \leq i \leq n$, P_i ne contient pas $I \cap \mathcal{A}_i$. Soit alors $g_i \in I \cap \mathcal{A}_i$ et $g_i \notin P_i$. Il est clair que $g_i \in P_j$ pour $j \neq i, 1 \leq j \leq n$. Par conséquent $g = g_1 + \dots + g_n \notin P_i$ quel que soit i, $1 \leq i \leq n$. Alors l'ouvert $V = D(g)$ est affine et contient tous les $x_i, 1 \leq i \leq n$. Mais comme $g \in I$, on a $Z \subseteq V(g) = X - V$ donc $V = D(g) \subseteq U = X - Z$. Ce qui termine de prouver l'assertion lorsque U n'est pas affine. Maintenant si U est affine, il suffit de prendre $V = U$. □

Corollaire 2.3. *Soient $B = K[T_1,\dots,T_n]$ un anneau de polynômes à un nombre fini de variables sur un corps K, X un schéma affine intègre et $f : X \longrightarrow S = Spec(B)$ un morphisme étale et surjectif. Alors $A = \Gamma(X,\underline{O}_X)$ est un B-module libre de type fini. Si en particulier $K = \mathbb{C}$, alors $f : X \longrightarrow S$ est un isomorphisme de schémas.*

Démonstration. D'après le lemme 2.1, A est un B-module projectif de type fini. Le théorème de QUILLEN et SUSLIN permet alors de conclure que A est un B-module libre de type fini. Si en particulier $K = \mathbb{C}$, alors l'homomorphisme $B \longrightarrow A$ induit par f fait de A une algèbre de type fini sur B. Soient alors X' et S' les variéts algébriques complexes associées à A et B respectivement et $f' : X' \longrightarrow S'$ le morphisme de variétés algébriques complexes induit par f. Comme A est une B-algèbre libre de type fini, toutes les fibres de f' ont le même nombre d'éléments égal au rang de A sur B, et comme S'_{an} est séparé et $f'_{an} : X'_{an} \longrightarrow S'_{an}$ est un isomorphisme local, on en conclut que $f'_{an} : X'_{an} \longrightarrow S'_{an}$ est un revêtement (cf [9] Lemme 2.1 §2). En outre comme S'_{an} est localement connexe par arcs, il en est de même de X'_{an} puisque $f'_{an} : X'_{an} \longrightarrow S'_{an}$ est un isomorphisme local. Ce qui implique que X'_{an} et S'_{an} sont connexes par arcs, donc $f'_{an} : X'_{an} \longrightarrow S'_{an}$ est un homéomorphisme (cf [4] Th. 25.1.5, Cor), donc un isomorphisme de variétés analytiques complexes d'après le théorème 2.29, et donc aussi un isomorphisme de variétés algébriques complexes d'après SERRE ([15] Prop. 9). On en conclut donc que $f : X \longrightarrow S$ est un isomorphisme de schémas. □

Corollaire 2.4. *(Conjecture Jacobienne Complexe)*
Soient K un sous-corps du corps des nombres complexes, $A = K[T_1, ..., T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur K ; $f_1, ..., f_n$ n éléments de A et $B = K[f_1, ..., f_n]$. On suppose dét$(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante non nulle de K. Alors l'injection canonique $B \longrightarrow A$ est un isomorphisme.

Démonstration. Soient $A' = \mathbb{C}[T_1, ..., T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur $\mathbb{C}$ et $f' : X' = Spec(A') \longrightarrow X'$ l'endomorphisme de schémas induit par $f = (f_1, ..., f_n)$. D'après ([10]), $f' : X' \longrightarrow X'$ est surjectif. En outre le fait que dét$(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante non nulle de $\mathbb{C}$ signifie que f' est un morphisme étale de schémas. Le corollaire (I 4) prouve donc que f' est un isomorphisme de schémas. Ce qui implique donc que l'injection canonique $\mathbb{C}[f_1, ..., f_n] \longrightarrow A' = \mathbb{C}[T_1, ..., T_n]$ est un isomorphisme, et comme $B' = B \otimes_K \mathbb{C}$ et $A' = A \otimes_K \mathbb{C}$, on en déduit que l'injection canonique $B \longrightarrow A$ est un isomorphisme.
Le raisonnement de (I 2) reste valable lorsqu'on prend pour A et B deux algègres intègres de type fini sur un corps algébriquement clos Ω et A étant étale sur B. □

On a donc le théorème suivant :

Théorème 2.5. *Soient X et Y deux variétés algébriques irréductibles sur un corps algébriquement clos Ω et $f : X \longrightarrow Y$ un Ω-morphisme affine étale. Alors pour tout point y de Y tel que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, le nombre d'éléments de $f^{-1}(y)$ est égal au degré de l'extension du corps des fonctions rationnelles sur X sur le corps des fractions rationnels sur Y.*

Corollaire 2.6. *Soient X et Y deux variétés algébriques irréductibles sur un corps algébriquement clos Ω et $f : X \longrightarrow Y$ un Ω-morphisme affine étale localement injectif. Alors f est une immersion ouverte. En particulier si f est surjectif, alors f est un isomorphisme de variables algébriques sur Ω.*

Démonstration. Si U un ouvert affine de X. Comme f est un morphisme ouvert alors $V = f(U)$ est un ouvert de Y. Choisissons U tel que $f|U$ soit injectif. Alors $f|U : U \longrightarrow V$ est un homéomorphisme. Donc la dimension combinatoire de V est égale à celle de U, et d'après un théorème de GROTHENDIECK la dimension combinatoire d'une variété algébrique est égale à sa dimension cohomologique. On en conclut donc que la dimension cohomologique de V est égale à la dimension cohomologique de U. Par conséquent V est affine ; et comme $f|U$ est injectif, alors $f|U$ est birationnel d'après (Théorème 2.5), donc f est birationnel. On en déduit donc que f est injectif d'après (Théorème 2.5), et comme f est en plus ouvert, f est nécessairement une immersion ouverte. □

Corollaire 2.7. *Soient X et Y deux variétés algébriques irréductibles sur un corps algébriquement clos Ω de caractérisation 0 et $f : X \longrightarrow Y$ un Ω-morphisme affine. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) $dim(X) = dim(Y)$
2) Y est normale.

3) f est localement injectif.
Alors f est une immersion ouverte.
En particulier si f est surjectif, alors f est un isomorphisme de variétés algébriques sur Ω.

Démonstration. L'assertion découle en fait du théorème 2.54. Le théorème suivant généralise la conjecture jacobienne lorsque le corps de base est le corps des nombres complexes. □

Théorème 2.8. *Soient X et Y deux variétés algébriques irréductibles su le corps des nombres complexes et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme affine de variétés algébriques complexes. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) $dim(X) = dim(Y)$
2) X_{an} est connexe par arcs pour la topologie euclidienne.
3) Y_{an} est séparé, connexe par arcs et simplement connexe pour la topologie eucliennne.
4) f est étale.
5) f est surjectif.
Alors f est un isomorphisme de variétés algébriques complexes.

Démonstration. Comme f est étale, alors f est un isomorphisme local pour la topologie euclienne. Alors d'après (Lemma2.10) et ([9] Lemme 2.1§2) f est un revêtement pour la topologie euclidienne. L'assertion découle donc de ([4] Th. 25.1.5, Cor.1) qui permet de voir que f est bijectif et permet de conclure que f es un isomorphisme de variétés algébriques complexes de la façon suivante : on recouvre X par des ouverts U_i de la topologie euclidienne sur X tels que $f_i = f|U_i$ soit un isomorpisme de variéts analytiques complexes de U_i sur l'ouvert $V_i = f(U_i)$ de Y. Si $g_i : f_i^{-1} : V_i \longrightarrow U_i$, il est clair que g_i et g_j coïncident sur l'ouvert $V_i \cap V_j$. Par conséquent les g_i définissent un morphisme de variétés analytiques complexes $g : Y \longrightarrow X$ qui est l'inverse de f. On en conclut donc d'après SERRE ([15] prop. 9).

□

Lemme 2.9. *Soient X et Y deux variétés algébriques irréductibles sur un corps algébriquement clos Ω et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme affine étale de variétés algébriques sur Ω. Pour tout point y de Y, notons $\nu(y)$ le nombre d'éléments de la fibre $f^{-1}(y)$. Alors la fonction $y \longrightarrow \nu(y)$ est constante sur l'ouvert $W = f(X)$*
de Y.

Démonstration. Soit V un voisinage ouvert affine de $y \in Y$ contenu dans W et soit $U = f^{-1}(V)$. Alors d'après le lemme (I.1), $A = \Gamma(U, \underline{O}_X)$ est un module projectif sur $B = \Gamma(V, \underline{O}_Y)$. Comme $V = Spec(B)$ est connexe, le rang de $M = \tilde{A}$ est constant sur V. Mais ce rang en un point y' de V est égal à $\nu(y')$, d'où la conclusion puisque W est connexe. □

Corollaire 2.10. *Soient X et Y deux variétés algébriques irréductibles complexes et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme affine étale et surjectif de variétés algébriques complexes. Alors $f_{an} : X_{an} \longrightarrow Y_{an}$ est un revêtement.*

Démonstration. L'assertion découle du Lemme 2.9 et de ([9] Lemme 2.1.§2) puisque f_{an} est un isomorphisme local. □

Corollaire 2.11. *Soient $A = \mathbb{C}[T_1, ..., T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur le corps des complexes $\mathbb{C}, f_1, ..., f_n$ n éléments de A, U un ouvert de ZARISKI non vide de $\mathbb{C}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ le morphisme de variétés algébriques complexes associé à $f = (f_1, ..., f_n)$. On suppose que V_{an}, où $V = f(U)$, est simplement connexe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) f est une immersion ouverte de variétés algébriques complexes.
2) f est injectif.
3) f est localement injectif pour la topologie de ZARISKI sur U.
4) f est localement injectif pour la topologie euclidienne sur U.
5) dét$(\partial f_i/\partial T_j)$ ne s'annule pas sur U.

Démonstration. Les implications $1) \Longrightarrow 2)$, $2) \Longrightarrow 3)$ et $3) \Longrightarrow 4)$ sont triviales. L'implication $4) \Longrightarrow 5)$ découle de ([13]). La condition 5) implique que f est un morphisme étale qui est aussi affine sur V à cause du choix des f_i, donc V est un ouvert de ZARISKI de $\mathbb{C}^n$. Par conséquent l'implication $5) \Longrightarrow 1)$ découle de (I.6) puisque V est séparé pour la topologie euclidienne et que U et V sont connexes et localement connexes par arcs, donc aussi connexes par arcs. □

Définition 2.12. On dit qu'un espace topologique est localement connexe par arcs si et seulement si tout point de cet espace admet un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Dans un tel espace X, une partie ouverte est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs, et les composantes connexes de X sont à la fois ouvertes et fermées, donc sont connexes par arcs : ce sont donc les composantes connexes par arcs de X. En particulier X est connexe si et seulement si X est connexe par arcs. De plus tout point de X admet un système fondamental de voisinages ouverts connexes par arcs (cf [4] Chap XVIII).

Proposition 2.13. *Soient X et Y deux espaces topologiques connexes et $f : X \longrightarrow Y$ un revêtement. On suppose que Y est séparé et simplement connexe et que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*
1) X est localement connexe par arcs.
2) Y est localement connexe par arcs.
Alors $f : X \longrightarrow Y$ es un homéomorphisme.

Comme f est un homéomorphisme local, si l'un des deux espaces est localement connexe par arcs, l'autre espace aussi est localement connexe par arcs. Par conséquent X et Y sont connexes par arcs. L 'assertion découle donc de ([4] Théorème 25.1.5, Cor 1).
Le théorème suivant généralise Corollaire2.3 lorsque $K = \mathbb{C}$.

Théorème 2.14. *Soient X une variété algébrique affine complexe irréductible et non singulière et $f : X \longrightarrow X$ un endomorphisme étale de variété algébrique complexe. On suppose que X_{an} est simplement connexe. Alors $f : X \longrightarrow X$ est un automorphisme de variété algébrique complexe.*

Démonstration. Comme f est surjectif d'après ([10]), $f_{an} : X_{an} \longrightarrow X_{an}$ est un revêtement d'après (Corollaire2.10). En outre comme X est non singulier, tout point de X_{an} admet un voisinage homéomorphisme à un ouvert connexe de $\mathbb{C}^m$ pour un entier $m \geq 1$, donc X_{an} est localement connexe par arcs et séparé. L'assertion découle donc de (Proposition2.13), du théorème (II), et de ([15], Prop. 9). □

Nous avons plus généralement le théorème suivant :

Théorème 2.15. *Soient X et Y deux variétés algébriques affines complexes irréductibles et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme étale et surjectif de variétés complexes. On suppose que Y est non singulières et que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*
1) X_{an} est simplement connexe.
2) Y_{an} est simplement connexe.
Alors $f : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme de variétés algébriques complexes.

Démonstration. Comme Y_{an} est non singulière, alors tout point y de Y_{an} admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^m$ pour un entier $m \geq 1$. Par conséquent Y_{an} est localement connexe par arcs. Si Y_{an} est simplement connexe, alors $f_{an} : X_{an} \longrightarrow Y_{an}$ est un homéomorphisme d'après (Proposition2.13) puisque Y_{an} est séparé. Dans ce cas l'assertion découle donc du théorème (III) et de SERRE ([15] prop. 9).
Supposons maintenant que X_{an} soit simplement connexe. Admettons que tout élément inversible de $\Gamma(X, \underline{O}_X)$ soit une constante non nulle de $\mathbb{C}$. Comme l'homomorphisme canonique $u : A = \Gamma(Y, \underline{O}_Y) \longrightarrow B = \Gamma(X, \underline{O}_X)$ est injectif et que l'image par u de tout élément inversible de A est un élément inversible de B, on en déduit que tout élément inversible de A est une constante
non nulle de $\mathbb{C}$ et que u induit une bijection entre les éléments inversibles de A et ceux de B. Dans ce cas l'assertion découle du théorème 2.72. □

Il nous reste donc à démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.16. *Soient X une variété algébrique affine complexe irréductible et $\bar{X}$ la normalisée de X. On suppose que $\bar{X}_{an}$ est simplement connexe et localement connexe par arcs. Alors toute fonction régulière inversible de X est constante. i.e. tout élément inversible de $\Gamma(X, \underline{O}_X)$ est un élément non nul de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Comme $\Gamma(X, \underline{O}_X)$ est contenu dans $\Gamma(\bar{X}, \underline{O}_{\bar{X}})$, il suffit donc de prouver que tout élément inversible de $\Gamma(\bar{X}, \underline{O}_{\bar{X}})$ est un élément non nul de $\mathbb{C}$. On peut donc supposer que $X = \bar{X}$, c'est-à-dire que X et normale, simplement connexe et localement connexe par arcs. Pour tout annneau R, notons R^* l'ensemble des éléments inversibles de R. Posons $A = \Gamma(X, \underline{O}_X)$ et supposons que $A^* \neq \mathbb{C}^*$. Alors d'après ([2] Proposition), $G = A^* = \mathbb{C}^* \oplus G_o$ où G_o est un groupe abélien libre de type fini et de rang $m \geq 1$. Nous noterons G_o multiplicativement. Soit n un entier ≥ 2. Comme G_o est un groupe libre, $G_o^n = \{g_o^n | g_o \in G_o\} \neq G_o$. Par conséquent $G_n = \{g_o^n | g \in G\} \neq G$. Il existe donc un élément $a \in G = A^*$ et $a \notin G^n$. Ce qui implique que le polynôme $X^n - a$ est irréductible dans $K[X]$ où K désigne le corps des fractions de A. Par conséquent $B = A[X]/(X^n - a)\, A[X]$ est un anneau intègre et si α désigne l'image de X dans B, on a $f'(\alpha) = n\, \alpha^{n-1}$ où $f(X) = X^n - a$. Donc $f'(\alpha)$ est inversible dans B, ce qui implique que B est une A-algèbre étale. Soit Y la variété algébrique affine complexe associée à B. Comme B est une A-algèbre libre de rang $n \geq 2$, on a nécessairement $A \neq B$.

Ce qui implique que le morphisme canonique : $\varphi : Y \longrightarrow X$ n'est pas un isomorphisme de variétés algébriques complexes. On en déduit donc d'après le théorème 2.29 et ([15] Prop. 9) que φ_{an} n'est pas un homéomorphisme. Or comme φ est un morphisme étale surjectif, $\varphi_n : Y_{an} \longrightarrow X_{an}$ est un revêtement d'après corollaire2.10 ; et X_{an} est séparé, localement connexe par arcs et simplement connexe, cela implique que φ_{an} est un homéomorphisme d'après proposition2.13. On aboutit donc à une contradiction. On en conclut donc que tout élément inversible de $A = \Gamma(X, \underline{O_X})$ est un élément non nul de $\mathbb{C}$. □

Corollaire 2.17. *Soi X une variété algébrique affine complexe irréductible et non singulière. On suppose que X_{an} est simplement connexe. Alors toute fonction régulière inversible de X est constante i.e. tout élément inversible de $\Gamma(X, \underline{O_X})$ est un élément non nul de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Comme on l'a vu dans la démonstration du théorème2.15, X_{an} est localement connexe par arcs donc l'assertion découle du théorème 2.16. □

Corollaire 2.18. *Soient X et Y deux variétés algébriques complexes irréductibles et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme étale des variétés algébriques complexes. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1) $dim(X) = dim(Y)$.
2) Y est affine.
3) $\Gamma(Y, \underline{O_Y})$ est un anneau factoriel.
4) X_{an} est simplement connexe.
5) X est non singulière.
6) f n'est pas birationnel.
Alors X n'est pas affine.

Démonstration. On supposera que X est une variété algébrique complexe affine. Soit $U = f(X)$ qui est un ouvert de X et supposons pour commencer que $codim(Y - U, Y) \geq 2$. On peut recouvrir U par un nombre fini d'ouvert $U_a = D(a), a \in A = \Gamma(Y, \underline{O_Y})$. Soit X_a l'image réciproque de U_a dans X. Comme le morphisme $f_a : X_a \longrightarrow U_a$ est étale et surjectif, $\Gamma(X_a, \underline{O_X})$ est une algèbre finie sur $\Gamma(U_a, \underline{O_Y})$. En multipliant tous les termes d'un système fini de générateurs de $\Gamma(X_a, \underline{O_X})$ sur $\Gamma(U_a, \underline{O_Y})$ par une puissance convenable de a, on voit que $\Gamma(X_a, \underline{O_X})$ est engendré sur $\Gamma(U_a, \underline{O_Y})$ par les images d'éléments de $B = \Gamma(X, O_X)$. Par conséquent si $g : X \longrightarrow U$ est induit par $f, g * \underline{O_Y}$ est un $\underline{O_U}$-module localement libre de type fini, donc $i * (g * \underline{O_X})$ est un $\underline{O_Y}$-module cohérent, où $i : U \longrightarrow Y$ est l'injection canonique, d'après ([17] Théorème 1) qui est également vrai lorsque X est un schéma noethérien normal et irréductible. Ce qui prouve donc que B est une A-algèbre finie. Alors le premier théorème de COHEN-SEIDENBERG, le morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est surjectif. Par conséquent $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme étale et surjectif. On en conclut d'après du théorème 2.15 que f est un isomorphisme de variétés algébriques complexes. Ce qui implique donc que f est birationel contrairement à l'hypothèse 6). On en déduit donc que soit $codim(Y - U, Y) = 1$, soit $U = Y$. Le cas $U = Y$ ayant été traité précédemment, il nous reste donc à traiter le cas $codim(Y - U, Y) = 1$. Comme $A = \Gamma(Y, \underline{O_Y})$ est un anneau factoriel, il existe donc $a \in A, a \neq 0$, a non inversible dans A tel que si I désigne l'idéal de $Z = Y - U$, on ait $I \subseteq aA$. Par conséqent on a $aB = B$. Mais comme l'homomorphisme canonique $A \longrightarrow B$ est injectif et que tout élément inversible de B est un élément non nul de

$\mathbb{C}$ d'après Corollaire2.17, on en déduit que a est un élément inversible de A, contrairement à l'hypothèse. On conclut donc que X n'est pas affine. $\square$

Corollaire 2.19. *Soient X et Y deux variétés algébriques affines complexes irréductibles et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme étale des variétés algébriques complexes. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) $dim(X) = dim(Y)$.
2) $\Gamma(Y, \underline{O}_Y)$ est un anneau factoriel.
3) X_{an} est simplement connexe.
4) X est non singulière.
Alors $f : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme de variétés algébriques complexes.

Démonstration. D'après (2.18), $f : X \longrightarrow Y$ est birationnel. Le MAIN THEOREM de ZARISKI permet d'affirmer que f est une immersion ouverte puisque f est quasi-fini. Il nous suffit donc de prouver que f est surjectif. Supposons que f ne soit pas surjectif, alors $Z = Y - f(X) \neq \emptyset$, donc $codim(Z,Y) \geq 1$. Supposons pour commencer que $codim(Z,Y) = 1$. Comme $A = \Gamma(Y, \underline{O}_Y)$ est un anneau factoriel, il existe un élément non inversible a de A tel que si I désigne l'idéal de Z, on ait $I \subseteq aA$. Par conséquent on a $aB = B$, donc a qui est un élément de $\Gamma(U, \underline{O}_Y)$ est un élément inversible de B. Comme $\Gamma(U, \underline{O}_Y)$ est isomorphe à $B = \Gamma(Y, \underline{O}_X)$ en tant que $\mathbb{C}$-algèbres, et que tout élément inversible de B est un élément non nul de $\mathbb{C}$ d'après (2.17), on en déduit que a qui est un élément inversible de $\Gamma(U, \underline{O}_Y)$ est un élément non nul de $\mathbb{C}$, ce qui contredit le fait que a est un élément non inversible de A. Par conséquent on a la relation $codim(Z,Y) \geq 2$. Cela implique que l'homomorphisme canonique $A \longrightarrow B$ est un isomorphisme puisque le morphisme $g : X \longrightarrow U$ induit par f est un isomorphisme de variétés algébriques complexes et que $A = \Gamma(U, \underline{O}_Y)$. On en déduit donc que $f : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme de variétés algébriques complexes.
Nouvelle démonstration de la conjecture jabociennne dans le cas complexe
Soit $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un endomorphisme de variété algébrique complexe défini par n polynômes $f_1, ..., f_n \in \mathbb{C}[T_1, ..., T_n] = \Gamma(\mathbb{C}^n, \underline{O}^n_{\mathbb{C}})$ tels que dét$(\partial f_i / \partial T_j)$ soit une constante non nulle de $\mathbb{C}$. Alors $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est un morphisme étale de variétés algébriques complexes, et comme $\mathbb{C}^n$ est non singulière et simplement connexe pour la topologie euclidienne et que $\Gamma(\mathbb{C}^n, O_{\mathbb{C}^n})$ est un anneau factoriel, on en déduit d'après (2.19) que f est un automorphisme de variété algébrique complexe, d'où la conclusion. $\square$

Théorème 2.20. *(D'Alembert - Gauss)*

Soit X une variété algébrique normale affine complexe irréductible. On suppose que X_{an} est simplement connexe et localement connexe par arcs (cette dernière condition est satisfaite lorsque X est non singulière). Alors toute fonction réguliére sur X et qui ne s'annule pas sur X est constante, autrement dit tout fonction régulière définie sur X et non constante s'annule
sur X.

Démonstration. Une fonction régulière sur X est inversible si et seulement si elle ne s'annule pas sur X. L'assertion découle donc de (2.16). $\square$

Remarque 2.21. La démonstration que nous venons de donner de la conjecture jacobienne est à mi-chemin entre la Géométrie Algébrique et la Topologie Générale. Nous avons simplement voulu valider la première démonstration que nous avons proposé concernant la conjecture jacobienne pour les sous-corps du corps des complexes. Nous allons montrer dans la partie qui va suivre comment compléter cette démonstration pour la conjecture jacobienne pour tous les corps de caractéristique zéro. En revanche la démonstration de la conjecture jacobienne généralisée que nous proposons dans la partie VIII de cet article est totalement algébrique. Comme la conjecture jacobienne généralisée implique la conjecture jacobienne, elle fournit une démonstration de la conjecture jacobienne qui ne s'appuie pas directement sur des résultats de Topologie Générale concernant les revêtements.
Pour conclure signalons que V. KULIKOV dans son article : Generalized and local jacobian problems, Russian Acad. Sc. Isv. Math. Vol 41 (1993), N° 2, p351-365, a construit un morphisme étale $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^3$ de degré 3. Ce morphisme n'est donc pas birationnel d'après le théorème des fibres des morphismes dominants de variétés algébriques. Donc X n'est pas une variété affine d'après (2.18).

Théorème 2.22. *(Conjecture Jacobienne)*
Soient K un corps de caractéristique 0 , $A = K[T_1,...,T_n]$ *l'anneau des polynômes à n variables sur K et $f_1,...,f_n$ n éléments de A. On suppose que $dét(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante non nulle de K. Alors l'injection canonique $K[f_1,...,f_n] \longrightarrow K[T_1,...,T_n]$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit L le sous - corps de K engendré sur $\mathbb{Q}$ par les coefficients sur K des polynômes $f_1,...,f_n$ et par $d = dét(\partial f_i/\partial T_j)$. Alors il existe des éléments $x_1,...,x_m$ de K algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et un élément a de K algébriquement sur $\mathbb{Q}(x_1,...,x_n)$ tel que $L = \mathbb{Q}(x_1,...,x_n)[a]$.
Comme d'autre part $\mathbb{R}$ est une extension de degré de transcendance infini de $\mathbb{Q}$, on peut trouver des éléments $\theta_1,...,\theta_n$ de $\mathbb{R}$ algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Ces éléments définissent un isomorphisme de corps
$u : \mathbb{Q}(x_1,...,x_m) \longrightarrow \mathbb{Q}(\theta_1,...,\theta_m)$ tel que $u(x_i) = \theta_i$ quelque soit $i = 1,...,m$.
Soit $P(X)$ le polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}(x_1,...,x_m)$. Comme l'isomorphisme a se prolonge en un isomorphisme $\bar{u} : \mathbb{Q}(x_1,...,x_m)[X] \longrightarrow \mathbb{Q}(\theta_1,...,\theta_m)[X]$, si $P_o(X) = \bar{u}(P(X))$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ qui annule $P_o(X)$. On en déduit donc un isomorphisme de corps $v : L = \mathbb{Q}(x_1,...,x_m)[a] \longrightarrow F = \mathbb{Q}(\theta_1,...,\theta_m)[\alpha]$ tel que $v(a) = \alpha$ et v prolonge u. De même v se prolonge en un isomorphisme $w : L[T_1,...,T_n] \longrightarrow F[T_1,...,T_n]$ tel que $w(T_i) = T_i$.
Posons $g_i = w(f_i)$, $1 \leq i \leq n$. Comme $d = dét(\partial f_i/\partial T_j) \in L$, on en conclut donc que $d_o = dét(\partial g_i/\partial T_j) \in F$ et $d_o = v(d)$, donc $d_o \neq 0$.
Par conséquent l'homomorphisme canonique $F[g_1,...,g_n] \longrightarrow F[T_1,...,T_n]$ est un isomorphisme d'après ([17]) puisque F est un sous - corps de $\mathbb{C}$. En considérant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} L[f_1,...,f_n] \arrow[r, "i"] & L[T_1,...,T_n] \\ F[g_1,...,g_n] \arrow[u, "h"] \arrow[r, "j"] & F[T_1,...,T_n] \arrow[u, "w^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

où $h(g_i) = f_i \quad 1 \leq i \leq n$ et h prolonge v^{-1} qui est bien défini puisque $g_1,...,g_n$ sont algébriquement indépendants sur F. On en conclut donc que $i \circ h$ est un isomorphisme puisque j et w^{-1} sont des isomorphismes. Par conséquent h est injectif et comme h est aussi surjectif, on en conclut donc que h est un isomorphisme. Ce qui implique que i est un isomorphisme. Ce qui signifie qu'il existe des polynômes en n variables sur L : $g_1, ..., g_n$ tels que $T_i = g_i(f_1, ..., f_n)$ $1 \leq i \leq n$ et comme L est contenu dans K, les g_i sont aussi à coefficients dans K. Ce qui implique que l'injection canonique $K[f_1, ..., f_n] \longrightarrow K[T_1, ..., T_n]$ est un isomorphisme. □

Corollaire 2.23. *Soit Ω un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et soit f : $\Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ un morphisme de variétés algébriques. On suppose que f est un isomorphisme local en tout point de Ω^n. Alors f est un isomorphisme de variétés algébriques.*

Démonstration. Si f est un isomorphisme local au point $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de Ω^n, alors $P(\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq 0$ où $P(T_1, ..., T_n) = dét(\partial f_i / \partial T_j)$ où les f_i désignent les composantes de f. Donc si f est un isomorphisme local en tout point de Ω^n, le polynôme $P(T_1, ..., T_n)$ ne s'annule en aucun point de Ω^n. D'après le NULLSTELLENSATZ de HILBERT, cela implique $P(T_1, ..., T_n)$ est une constante non nulle de Ω. L'assertion découle donc de la conjecture jacobienne. □

Corollaire 2.24. *Soient K un corps de caractéristique 0 , $A = K[T_1, ..., T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur K et $f_1, ..., f_n$ n éléments de A.*
On suppose qu'il existe un corps algébriquement clos Ω contenant K tel que le morphisme de variétés algébriques $u : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ défini par $f = (f_1, .., f_n)$ soit injectif. Alors l'application $v : K^n \longrightarrow K^n$ définie par f est bijective et il existe n élément $g_1, ..., g_n$ de A tels que l'application $w : K^n \longrightarrow K^n$ définie par $g = (g_1, ..., g_n)$ soit l'application réciproque de v.

Démonstration. Soit ϕ l'endomorphisme de $B = \Omega[T_1, ..., T_n]$ associé à f. Le fait que u soit injectif implique que ϕ est injectif $(cf[10])$ et donc quasi - fini. Le critère de platitude $(cf[6],\ chap.III,\ Ex.10.9)$ montre que ϕ est plat donc u est ouvert. Par conséquent u est un morphisme dominant. Compte tenu de l'injectivité de ϕ et du fait que Ω est de caractéristique 0, le théorème des fibres des morphismes dominants de variétés algébriques implique que le degré de l'extension de corps induit par ϕ est 1. Par conséquent si $C = \Omega[f_1, ..., f_n]$, alors C et B ont le même corps des fractions et B est fidèlement plat sur C puisque u est surjectif d'après ([10]), étant donné que $\Omega^n = Max(B) = Max(C)$ cela implique $B = C$. En effet si $u \in B$, alors il existe v et $w \in C, w \neq 0$ tel que $u = \dfrac{v}{w}$, donc $v = uw \in wB \cap C = wC$. On en conclut donc qu'il existe $t \in C$ tel que $v = wt$, ce qui implique que $u = t$, donc $u \in C$, d'où la conclusion. On en déduit en particulier que $d = dét\left(\partial f_i / \partial T_j\right)$ est une constante non nulle de $C = B$. Par conséquent $d \in K[T_1, ..., T_n] \cap \Omega = K$. Donc d est une constante non nulle de K. La conjecture jacobienne implique donc que l'injection canonique $K[f_1, ..., f_n] \longrightarrow K[T_1, ..., T_n]$ est bijective. Il existe donc n éléments $g_1, ..., g_n$ de A tels que $T_i = g_i(f_1, ..., f_n)$, $1 \leq i \leq n$.
Alors l'application $w : K^n \longrightarrow K^n$ définie par $g = (g_1, ..., g_n)$ est l'application réciproque de u. □

Corollaire 2.25. *Soient Ω un corps algébriquement clos de caractéristique 0, $A = \Omega[T_1, ..., T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur Ω et $f_1, ..., f_n$ n élément de A. On suppose que* *le morphisme* $u : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ *défini par* $f = (f_1, ..., f_n)$ *est injectif. Alors u est un isomorphisme de variétés algébriques.*

Remarque 2.26. La démonstration du corollaire (**??**) est calquée sur les arguments développés dans ([2] Final Remarks). Elle suggère une autre démonstration de la conjecture jacobienne en caractéristique 0 qui s'appuie sur celle des sous - corps de $\mathbb{C}$. C'est la suivante

Nouvelle démonstration de la conjecture jacobienne en caractéristique 0.
Les arguments développés dans la démonstration du théorème I montrent que pour démontrer la conjecture jacobienne en caractéristique 0, il suffit de la démontrer pour le corps des complexes. Dans ce cas le morphisme $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ induit par $f = (f_1, ..., f_n)$ est un revêtement pour la topologie euclidienne d'après (2.10), donc un homéomorphisme d'après (4] Th. 25.1.5, Cor. 1) puisque $\mathbb{C}^n$ est séparé, connexe par arcs et simplement connexe pour la topologie euclienne. Par conséquent notre raisonnement pour de démontrer la conjecture jacobienne en caractéristique 0, permet de voir que pour démontrer la conjecture jacobienne en caractéristique 0, il suffit de la démontrer pour tout corps algébriquement clos Ω de caractéristique 0, en supposant que le morphisme $\Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ induit par $f = (f_1, ..., f_n)$ est injectif.
Désignons par ϕ l'endomorphisme de $A = \Omega[T_1, ..., T_n]$ définie par
$f = (f_1, ..., f_n)$ D'après ([1] *Cor.*1.4) ϕ est étale. Compte tenu de l'injectivité de ϕ et du théorème des fibres pour les morphismes dominants de variétés algébriques, on en déduit que le degré de l'extension de corps induit par ϕ est égal à 1 puisque Ω est de caractéristique 0. Autrement dit A et $B = \Omega[f_1, ..., f_n]$ ont même corps des fractions et comme A est plat sur B, donc fidèlement plat sur B puisque ϕ est surjectif d'après ([4]), étant donné que $\Omega^n = Max(A) = Max(B)$. On en conclut donc que $B = A$, autrement dit ϕ est un isomorphisme. Cette démonstration permet d'établir également le résulat suivant :

Proposition 2.27. *Soient K un corps,* $A = K[T_1, ..., T_n]$ *l'anneau des polynômes à n variables sur K et* $f_1, ..., f_n$ *n éléments de A. On suppose que dét*$(\partial f_i / \partial T_j)$ *est une constante non nulle de K. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) l'injection canonique $K[f_1, ..., f_n] \longrightarrow K[T_1, ..., T_n]$ *est un isomorphisme*
2) l'injection canonique $K(f_1, .., f_n) \longrightarrow K(T_1, ..., T_n)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Lorsque K est algébriquement clos, la démonstration précédente permet de montrer que 2) implique 1) et comme l'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) est triviale, la conclusion en découle.
Maintenant lorsque K n'est pas algébriquement clos, en prenant pour Ω une clôture algébrique de K, on remarque que $\Omega(f_1, ..., f_n) = K(f_1, ..., f_n)(\Omega)$ et $\Omega(T_1, ..., T_n) = K(T_1, ..., T_n)(\Omega)$. On en déduit donc que l'injection canonique $\Omega(f_1, ..., f_n) \longrightarrow \Omega(T_1, ..., T_n)$ est un isomorphisme si l'injection canonique $K(f_1, ..., f_n) \longrightarrow K(T_1, ..., T_n)$ est un isomorphisme. Par conséquent, la condition 2) implique que l'injection canonique $\phi : \Omega[f_1, ..., f_n] \longrightarrow \Omega[T_1, ..., T_n]$ est un isomorphisme. On en conclut donc que l'injection canonique
$\phi_o : K[f_1, ..., f_n] \longrightarrow K[T_1, ..., T_n]$ est un isomorphisme puisque $\phi = \phi_o \otimes id_{\mathbb{C}}$. □

Corollaire 2.28. *Soient* Ω *un corps algébriquement clos,* $A = \Omega[T_1, ..., T_n]$ *l'anneau des polynômes à n variables sur* Ω *et* $f_1, ..., f_n$ *n éléments de A. On suppose que dét*$(\partial f_i / \partial T_j)$ *est une constante non nulle de* Ω*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) l'injection canonique $\Omega[f_1,...,f_n] \longrightarrow \Omega[T_1,...,T_n]$ est un isomorphisme
2) le morphisme $\Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ de variétés algébriques défini par $f=(f_1,...,f_n)$ est birationnel.
Les résultats suivant généralisent un résultat établi par RUDIN (cf [14]) lorsque $X=\mathbb{C}^n$, qui est le cas particulier du Corollaire (2.2) pour $\Omega=\mathbb{C}$.

Théorème 2.29. *Soient X et Y deux variétés analytiques complexes et $f: X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés analytiques complexes. On suppose vérifiées les deux conditions suivantes :*
i) $dim(X)=dim(Y)$.
ii) f est bijectif.
Alors f est un isomorphisme de variétés analytiques complexes.

Démonstration. D'après ([13]), f est un difféomorphisme local. Par conséquent f est un difféomorphisme, puisque f est ouvert, à cause de l'égalité des dimensions et du théorème de l'invariance du domaine (cf [5] Cor. 14.8 p. 156), et à cause du fait que f est bijectif. On en conclut donc d'après ([17] Théorème 6) que f est un isomorphisme de variétés analytiques complexes. □

Remarque 2.30. Par variété analytique complexe, nous entendons espace analytique complexe non singulier dont tous les points ont la même dimension. L'expression "non singulier" signifie "ne possède pas de point singulier". Par contre une variété algébrique irréductible ou non peut contenir des points singuliers.

Corollaire 2.31. *Soient X et Y deux variétés algébriques complexes non singulières irréductibles et $f: X \longrightarrow Y$ un morphisme bijectif de variétés algébriques complexes. Alors f es un isomorphisme de variétés algébriques complexes.*

Démonstration. Comme localement X et Y sont homéomorphes respectivement à des ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{R}^{2m}$ où $n=dim(X)$ et $m=dim(Y)$, le théorème de l'invariance de la dimension appliqué à X_{an}, Y_{an} *et* f_{an} ([4] Cor.14.9 p. 157) implique que $dim(X)=n \leq m = dim(Y)$. Soient V un ouvert affine de Y et U un ouvert affine de U au dessus de V. Alors l'injectivité du morphisme $U \longrightarrow V$ induit par f implique que l'homomorphisme $\Gamma(V,\underline{O}_V) \longrightarrow \Gamma(U,\underline{O}_U)$ induit par f est injectif, donc $dim(Y)=dim(V) \leq dim(U)=dim(X)$. On en déduit donc que $dim(X)=dim(Y)$. On en conclut donc d'après le théorème (II) que f est un isomorphisme de variétés analytiques complexes. Par conséquent d'après SERRE ([15] Prop. 9), f est un isomorphisme de variétés algébriques complexes. □

Corollaire 2.32. *Soient X une variété algébrique affine non singulière irréductible et $f: X \longrightarrow X$ un endomorphisme injectif de variété algébrique complexe. Alors f es un automorphisme de variété algébrique complexe.*

Démonstration. D'après ([10]), f est surjectif, donc f est bijectif. L'assertion découle donc du corollaire (2.23). □

Corollaire 2.33. *Soient X et Y deux variétés algébriques affines complexes non singuliers irréductibles, $f: X \longrightarrow Y$ et $g: Y \longrightarrow X$ deux morphismes injectifs de variétés algébriques complexes. Alors f et g sont des isomorphismes de variétés algébriques complexes.*

Démonstration. D'après le corollaire 2.24, gof est un automorphisme de variété algébrique complexe. Ce qui implique que gof est bijectif. On en conclut donc que g est surjectif, dont bijectif. Ce qui implique également que f est bijectif. Donc l'assertion découle du corollaire 2.23. □

Corollaire 2.34. *Soit $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un endomorphisme de variété algébrique. On suppose que f est localement injectif. Alors f est un automorphisme de variété algébrique.*

Démonstration. Comme f est localement injectif, f_{an} est un homéomorphisme local d'après le théorème de l'invariance du domaine (cf [2] Cor. 14. 8 p. 156). On en déduit donc d'après le théorème (**??**) que f_{an} est un isomorphisme local de variétés analytiques complexes. Supposons que $f = (f_1, ..., f_n)$ où f_i appartient à l'anneau des polynômes à n variables sur $\mathbb{C}, A = \mathbb{C}[T_1, ..., T_n], i, 1 \leq i \leq n$. Alors le critère jacobien des points simples montre que $dét(\partial f_i/\partial T_j)$ ne s'annule en aucune point de $\mathbb{C}^n$. Alors d'après le NULLSTELLENSATZ de HILBERT, $d = dét(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante non nulle de $\mathbb{C}$. L'assertion découle donc de la conjecture jacobienne.
Pour ne pas conclure par la conjecture jacobienne, il suffit de remarquer qu'il existe deux recouvrements ouverts de $\mathbb{C}^n$ (U_α) et $(V_\alpha), \alpha \in \Lambda$, en prenant chaque V_α égal à une boule ouverte tels que $V_\alpha = f(U_\alpha)$, et pour chaque α, un morphisme de variétés analytiques complexes $g_\alpha : V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ tel que $g_\alpha = f_\alpha^{-1}$ où $f_\alpha = f|U_\alpha$. En fait d'après SERRE [15] Prop. 9), g_α est morphisme de variétés. $g_\alpha : V_\alpha \longrightarrow U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. Ces g_α se recollent à cause du principe du prolongement analytique puisque g_α et g_β coïncident sur l'ouvert non vide $W_{\alpha\beta} = f(U_\alpha \cap U_\beta)$ et $V_\alpha \cap V_\beta$ est connexe et définissent un morphisme de variétés analytiques complexes $g : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ qui est l'inverse de f. Donc f est un automorphisme de variétés analytiques complexes. Par conséquent f est un automorphisme de variétés algébriques complexes d'après SERRE ([15] Prop. 9). □

Remarque 2.35. 1) Dans l'énoncé du théorème 6 de ([17]), il faut supposer normal.
2) La proposition(2.27) donne une autre démonstration de la conjecture jacobienne pour le corps des complexes puisque l'hypothèse de la conjecture jacobienne signifie que f est un isomorphisme local de variétés analytiques complexes donc f est localement injectif. Ce qui permet de donner une autre démonstration de la conjecture jacobienne pour les sous-corps de $\mathbb{C}$.

Théorème 2.36. *Soient X et Y deux schémas intègres non singuliers localement de type fini sur un corps K, $f : X \longrightarrow Y$ un K-morphisme de schémas, X_o l'ensemble des points fermés de X, Y_o l'ensemble des points fermés de Y et $f_o : X_o \longrightarrow Y_o$ le K - morphisme induit par f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) $dim(X) = dim(Y)$
2) f_o est surjectif
3) f_o est localement injectif.
4) Alors l'application continue $\bar{f}$ associé à f est un homéomorphisme et f est fidélement plat.

Démonstration. Soient x_o un point de x_o $, y_o = f_o(X_o), A$ le henselisé de l'anneau local de X_o au point x_o et B le henselisé de l'anneau local de Y_o au point y_o. Il est clair que f_o est quasi - fini à cause de la condition 3) et dominant à cause de la condition 1). On en conclut donc que l'homomorphisme $B \longrightarrow A$ est injectif et fini. Comme A et B sont des anneaux locaux réguliers, alors A est plat sur B d'après le théorème de HIRONAKA. Ce qui implique que f est fidèlement plat. Donc f est un morphisme ouvert et par conséquent f_o est un morphisme ouvert. Soient (U_α) et (V_α), $\alpha \in \Lambda$ des recouvrements ouverts affines de X_o et Y_o respectivement tels que $V_\alpha = f_o(U_\alpha)$ et $f_\alpha = f|U_\alpha$ est injectif. L'existence de ces deux recouvrements découle du fait que f_o est surjectif. Donc $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ est un isomorphisme puisqu'il est ouvert et bijectif. Soit $g_\alpha : V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ l'application inverse de l'application continue $\bar{f}_\alpha$ associée à f_α. Pour α et $\beta \in \Lambda$, g_α et B_β coïncident sur $W_{\alpha\beta} = f(U_\alpha \cap U_\beta)$ qui est un ouvert non vide de $V_\alpha \cap V_\beta$, on en conclut donc que g_α et g_β coïncident sur $V_\alpha \cap V_\beta$. Pour s'en convaincre il suffit tout simplement de remarquer que les applications continues associées à g_α et g_β coïncident dans l'ouvert $W_{\alpha,\beta}$ qui est dense dans $V_\alpha \cap V_\beta$, coïncident dans $V_\alpha \cap V_\beta$. Donc ces applications se recollent et déterminent une application continue $\bar{g}_o : X \longrightarrow X$ qui est l'inverse de l'application continue $\bar{f}_o : X \longrightarrow X$ associée à f_o. Donc les g_α se recollent et définissent une application continue $g_o : Y_o \longrightarrow X_o$ qui est l'inverse de l'application continue $\bar{f}_\alpha$ associée à f_o. On en conclut donc que $\bar{f}_o$ est un homéomorphisme. Ce qui implique que $\bar{f}$ est un homéomorphisme. □

Corollaire 2.37. *Soient X et Y deux schémas affines intègres non singuliers localement de type fini sur un corps K, $f : X \longrightarrow Y$, X_o l'ensemble des points fermés de X, Y_o l'ensemble des points fermés de Y et $f_o : X_o \longrightarrow Y_o$ le K-morphisme induit par f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. *$dim(X) = dim(Y)$.*
2. *f_o est surjectif.*
3. *f_o est localement injectif.*
4. *pour tout $x \in X_o$, l'homomorphisme $\underline{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ est surjectif.*

Alors f est un isomorphisme de schémas sur K.

Démonstration. Comme $dim(X) = dim(Y)$, on en déduit que pour tout $x \in X_o$, l'homomorphisme $O_{Y,f(x)} \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ est bijectif. Ce qui d'après le théorème 2.36 implique que f_o est un isomorphisme, donc f est un isomorphisme. □

Corollaire 2.38. *Soient X et Y deux variétés algébriques affines intègres non singulières de type fini sur un corps algébriquement clos Ω de caractéristique 0 et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques sur Ω. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. *$dim(X) = dim(Y)$.*
2. *f est surjectif.*
3. *f est localement injectif.*

Alors f est un isomorphisme de variétés algébriques sur Ω.

Démonstration. La démonstration du théorème 2.36 permet de montrer que f est plat et injectif. Donc l'assertion découle de la démonstration du corollaire (2.24) qui permet de montrer que f est birationnel, et comme f es fidèlement plat cela implique que f est un isomorphisme de variétés algébriques nul. □

Corollaire 2.39. *Soient X et Y deux variétés algébriques affines non singulières irréductibles sur un corps algébriquement clos. Ω et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques sur Ω. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) $dim(X) = dim(Y)$.
2) f est surjectif
3) Pour tout $x \in X_o$, l'homomorphisme $\underline{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ est surjectif.
Alors f est un isomorphisme de variétés algébriques sur Ω.

Corollaire 2.40. *Soient X une variété algébrique affine non singulière irréductible sur un corps algébriquement clos Ω de caractéristique 0 et $f : X \longrightarrow X$ un endomorphisme de variétés algébrique sur Ω. On suppose que f est localement injectif. Alors f est un automorphisme de variété algébrique sur Ω.*

Démonstration. D'après ([10]) , f est surjectif, la conclusion découle du corollaire 2.31. □

Corollaire 2.41. *Soient Ω un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et $f : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ un endomorphisme de variété algébrique injectif. Alors f est un automorphisme de variété algébrique sur Ω.*

Corollaire 2.42. *Soient X et Y deux variétés algébriques affines non singulières irréductibles sur un corps algébriquement clos Ω de caractéristique 0, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ deux morphismes localement injectifs de variétés algébriques sur Ω. Alors f et g sont des isomorphisme de variétés algébriques sur Ω.*

Démonstration. La démonstration peut-être calquée sur celle de (2.25) que ce corollaire généralise compte tenu de (2.3). □

Remarque 2.43.

1. Dans l'énoncé du corollaire (2.38), l'hypothèse 4) découle des hypothèses 1), 2) et 3) lorsque K est un corps de caractéristique 0. En effet l'injectivité de l'homomorphisme $\Gamma(U_\alpha, f_\alpha)$ et la nullité de la caractéristique de K permettent via le théorème des fibres des morphismes dominant de conclure que f est birationnel. Comme f_α est fidèlement plat, on en déduit donc que f_α est un isomorphisme quel que soit α, donc pour tout $x \in X_o$, l'homomorphisme $\underline{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ est un isomorphisme.

2. Dans l'énoncé du corollaire (**??**), on peut remplacer l'hypothèse "injectif" par "localement injectif" compte tenu du corollaire (2.34).

Corollaire 2.44. *Soient X et Y deux variétés algébriques affines intègres non singulières sur un corps algébriquement clos Ω et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques sur Ω. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. *f est surjectif.*
2. *f est un isomorphisme local de variétés algébriques sur Ω.*

Alors f est isomorphisme de variétés algébriques sur Ω.

Corollaire 2.45. *Soient X une variété algébrique affine intègre non singulière sur un corps algébriquement clos Ω et $f : X \longrightarrow X$ un endomorphisme de variété algébrique sur Ω. On suppose que f est un isomorphisme local de variétés algébriques sur Ω. Alors f est un automorphisme de variété algébrique sur Ω.*

Démonstration. D'après ([10]), f est surjectif, d'où la conclusion d'après (2.41). □

Corollaire 2.46. *Soient Ω un corps algébriquement clos et $f : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ un endomorphisme de variété algébriquement sur Ω. On suppose que f est un isomorphisme local de variétés algébriques sur Ω. Alors f est un automorphisme de variété algébrique sur Ω.*

Corollaire 2.47. *Soient X et Y deux variétés algébriques affines intègres non singulières sur un corps algébriquement clos $\Omega, f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ deux morphismes de variétés algébriques sur Ω. On suppose que f et g sont des isomorphismes locaux de variétés algébriques sur Ω. Alors f et g sont des isomorphismes de variétés algébriques sur Ω.*

Démonstration. La démonstration peut-être calquée sur celle de (2.33) compte tenu de (2.45). □

Corollaire 2.48. *Soient X et Y deux schémas intègres non singuliers localement de type fini sur un corps K, $f : X \longrightarrow Y$ un K-morphisme de schémas, X_o l'ensemble des points fermés de X, Y_o l'ensemble des points fermés de Y et $f_o : X_o \longrightarrow Y_o$ le K-morphisme induite par f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. *$dim(X) = dim(Y)$.*
2. *f_o est surjectif.*
3. *f_o est localement injectif.*

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un isomorphisme de schémas et que f soit birationnel.

Démonstration. Dans la démonstration du théorème (2.36), nous avons démontré que f est plat, donc pour tout $x \in X$ l'homomorphisme $\underline{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ est bijectif si et seulement si f est birationnel, d'où la conclusion puisque f_o est bijectif et ouvert. □

Théorème 2.49. *Soient X et Y deux schémas intègres non singuliers localement de type fini sur un corps K, $f : X \longrightarrow Y$ un K-morphisme de schémas, X_o l'ensemble des points fermés de X, Y_o l'ensemble des points fermés de Y et $f_o : X_o \longrightarrow Y_o$ le K-morphisme induit par f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. *$dim(X) = dim(Y)$.*
2. *f_o est localement injectif.*

Alors f est injectif et plat.

Démonstration. La démonstration du théorème (2.36) montre que ces deux hypothèses suffisent por prouver que f est plat. En considérant f comme un morphisme de X dans l'ouvert V de Y, on voit que toutes les hypothèses du théorème (IV) sont remplies pour X, V et f induit un homéomorphisme plat de X dans V, d'où la conclusion. □

Corollaire 2.50. *Soient X et Y deux schémas intègres non singuliers localement de type fini sur un corps K, $f : X \longrightarrow Y$ un K-morphisme de schémas, X_o l'ensemble des points fermés de X, Y_o l'ensemble des points fermés de Y et $f_o : X_o \longrightarrow Y_o$ le K-morphisme induit par f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. *$dim(X) = dim(Y)$.*
2. *f_o est localement injectif.*
3. *pour tout $x \in X_o$, l'homorphisme $\underline{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ est surjectif.*

Alors f est une immersion ouverte.

Démonstration. Comme f est plat, l'homomorphisme $\underline{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ est injectif, donc bijectif. Comme f est plat donc ouvert et injectif, on en conclut donc que f est immersion ouverte. □

Démonstration. Comme f est plat, l'homomorphisme $\underline{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \underline{O}_{X,x}$ est injectif, donc bijectif. Comme f est plat donc ouvert et injectif, on en conclut donc que f est immersion ouverte. □

Corollaire 2.51. *Soient X et Y deux schémas intègres non singuliers localement de type fini sur un corps K, $f : X \longrightarrow Y$ un K-morphisme de schémas, X_o l'ensemble des points fermés de X, Y_o l'ensemble des points fermés de Y et $f_o : X_o \longrightarrow Y_o$ le K-morphisme induit par f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. *$dim(X) = dim(Y)$.*
2. *f_o est un isomorphisme local.*

Alors f est une immersion ouverte.

Corollaire 2.52. *Soient X et Y deux schémas intègres non singuliers localement de type fini sur un corps K de caractéristique* 0*, $f : X \longrightarrow Y$ un K-morphisme de schémas, X_o l'ensemble des points fermés de X, Y_o l'ensemble des points fermés de Y et $f_o : X_o \longrightarrow Y_o$ le K-morphisme induit par f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. *$dim(X) = dim(Y)$*
2. *f_o est localement injectif.*

Alors f est une immersion ouverte.

Démonstration. Soient V un ouvert affine de $f(X)$ et $U = f^{-1}(V)$. Alors $f|U : U \longrightarrow V$ est un homéomorphisme. Donc la dimension combinatoire de U est égale à la dimension combinatoire de V, et comme la dimension combinatoire est égale à la dimension cohomologique d'après un théorème de GROTHENDIECK, on en conclut que U est un ouvert affine. Soient Ω la clôture algébrique de K, V' une composante connexe de $V_{X_K}\ \Omega$ et $U' = f^{-1}(V')$ qui est une composante connexe de $V_{X_K}\ \Omega$. Le morphisme $U' \longrightarrow V'$ est un isomorphisme d'après le corollaire (2.32), donc le morphisme $U \longrightarrow V$ est un isomorphisme. On en conclut donc que f est une immersion ouverte. □

Corollaire 2.53. *Soient X et Y deux schémas intègres non singuliers localement de type fini sur un corps K de caractéristique* 0*, $f : X \longrightarrow Y$ un K-morphisme, X_o l'ensemble des points fermés de X, Y_o l'ensemble des points fermés de Y et $f_o : X_o \longrightarrow Y_o$ le K-morphisme induit par f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. $dim(X) = dim(Y)$
2. f_o *est localement injectif.*
3. f_o *est surjectif.*

Alors f *est un isomorphisme de schémas sur* K*.*

Démonstration. : Elle découle du corollaire (2.52). □

Théorème 2.54. *Soient* X *et* Y *deux variétés algébriques irréductibles sur un corps algébriquement clos.* Ω *et* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme affine de variétés algébriques sur* Ω*. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. $dim(X) = dim(Y)$
2. f *est localement injectif*
3. *Le corps des fonctions rationnelles de* X *est une extension séparable du corps des fonctions rationelles de* Y*.*
4. Y *est normale.*

Alors f *est une immersion ouverte.*

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.55. *Tout morphisme localement injectif de variétés algébriques irréductibles de même dimension sur un corps algébriquement clos est un morphisme quasi-fini et dominant.*

Démonstration. Soient Ω un tel corps et $f : X \longrightarrow Y$ un tel morphisme. On peut supposer X et Y affines et f injectif. Alors f est quasi-fini puisque X est quasi-compact, et comme X et Y ont même dimension on en conclut que f est dominant. □

Démonstration du Théorème 2.54

On peut supposer X et Y affines. Soit X_o un ouvert affine de X tel que la restriction f_o de f à X_o soit injective. Alors le fait que le corps des fonctions rationelles de X soit une extension finie et séparable du corps des fonctions rationelles de Y combiné au fait que f_o est injectif impliquent que f est birationel (cf [6] Cor. 1 p.136). Alors le MAIN THEOREM de ZARISKI nous assure que f est une immersion ouverte puisqu f est quasi-fini d'avoir le lemme (2.50).

Corollaire 2.56. *Soient* X *et* Y *deux variétés algébriques irréductibles sur un corps algébriquement clos* Ω*,* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme affine de variétés algébriques sur* Ω*. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

1. $dim(X) = dim(Y)$*.*
2. f *est localement injectif.*
3. f *est surjectif.*
4. *Le corps des fonctions rationelles de* X *est une extension séparable du corps des fonctions rationelles.*
5. Y *est normale.*

Alors f est un isomorphisme de variétés algébriques sur Ω.

Corollaire 2.57. *Soient X une variété algébrique affine irréductible et normale sur un corps algébriquement clos Ω de caractéristique 0. Alors tout endomorphisme localement injectif $f : X \longrightarrow X$ de variété algébrique sur Ω est un automorphisme de variété algébrique sur Ω.*

Démonstration. D'après ([10]), f est surjectif, donc l'assertion découle du corollaire (2.51). □

Théorème 2.58. *Soient Ω un corps algébriquement clos et $f : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ un morphisme de variétés algébriques sur Ω. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un isomorphisme.*
2. *f est injectif.*
3. *f est localement injectif.*

Si ces conditions sont satisfaites et si $f_1, ..., f_,$ appartenant à $\Omega[T_1, ..., T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur Ω sont les fonctions coordonnées de f, alors dét$(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante non nulle de Ω.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.59. *Soient $A = \Omega[T_1, ..., T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur un corps algébriquement clos Ω ; $f_1, ..., f_n$ n éléments de A, U un ouvert non vide de Ω^n et $f : U \longrightarrow \Omega^n$ le morphisme de variétés algébriques sur Ω associé à $(f_1, ..., f_n)$. On suppose que f est injectif. Alors f est une immersion ouverte et dét$(\partial f_i/\partial T_j)$ ne s'annule pas sur U.*

Démonstration. Nous allons établir le lemme par récurrence sur n.
1) Nous allons supposer pour commencer que $n = 1$. Dans ce cas $U = D(g)$ où g est un polynôme non nul. Puisque f est injectif, alors $f_1(T_1)$ n'est pas un polynôme constant. Supposons que $m = deg(f_1) > 1$. Soit $Z = V(g)$ le fermé de Ω défini par g, c'et aussi l'ensemble des zéros de g dans Ω. C'est donc un sous-ensemble fini de Ω. Nous désignerons également par f le morphisme de Ω dans Ω défini par f_1. Alors $S = f(Z)$ est aussi un sous-ensemble fini de Ω. Comme Ω est infini, il existe une infinité de α appartenant à Ω et n'appartenant pas à Ω. Alors pour un tel α, l'équation $f_1(T_1) = \alpha$ possède m racines distinctes ou confondus appartenant à U puisque $S = f(Z)$ et $Z = \Omega - U$. Comme par hypothèse f est injectif, ces racines sont nécessairement confondues. Par conséquent pour tout $\alpha \notin S, \alpha \in \Omega$, il existe $a \in \Omega$ tel que $f_1(T_1) - \alpha = c(T_1 - a)^m$ où c est le coefficient dominant de f_1. Il est clair que l'application qui à α fait correspondre a est injective. Comme Ω est infini et S est fini, il existe $\alpha \in \Omega - S, \beta \in \Omega - S, \alpha \neq \beta$ tels que si $f_1(T_1) - \alpha = c(T_1 - a)^m$ et $f_1(T_1) - \beta = c(T_1 - b)^m$, on ait $a + b \neq 0$ et $ab \neq 0$. On tire de ces relations, la relation suivante :

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= c[(T_1 - b)^m - (T_1 - a)^m] \\ &= c(a-b) \sum_{r+s=m-1} (T_1 - a)^r (T_1 - b)^s = P(T_1) \ \cdot\end{aligned}$$

Donc le polynôme $P(T_1)$ est constant.
Le coefficient γ_1 du terme T_1 de $P(T_1)$ est égale :

$$(-1)^m\, c(a-b)(a+b) \sum_{r+s=m-1} a^{r-1}\, b^{s-1}.$$

En fixant b, c'est un polynôme de degré $m+1$ en a dont le coefficient dominant est égal à $(-1)^{m+1}\, c\, b^2 \neq 0$. Comme a peut prendre une infinité de valeurs tout en respectant les hypothèses faites au départ, il existe au moins une valeur de a pour laquelle $\gamma_1 \neq 0$. Ce qui contredit le fait que $P(T_1)$ est un polynôme constant. On en conclut donc que $m = 1$, c'est-à-dire que $f_1(T_1) = d\ T_1 + e$ où d et e sont des éléments de Ω avec $d \neq 0$. Ce qui implique donc $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ est un isomorphisme de variétés algébrique sur Ω et le déterminant jacobien de f est égal à $d \neq 0$. L'assertion est donc vraie lorsque $n = 1$.
2) Nous allons maintenant montrer que si $\dfrac{\partial f_i}{\partial T_j}\,(0) \neq 0$ pour un couple d'entier $(i,j), i \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, alors $J(f)(0) \neq 0$ où $J(f) = \text{dét}\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)$ est le déterminant jacobien de f, par récurrence sur n.
Compte tenu de ce nous avons établi dans la partie 1), l'assertion est vraie pour $n = 1$. Nous supposerons donc que $n \geq 2$. Nous pouvons également supposer que $f(0) = 0$ et que $\dfrac{\partial f_1}{\partial T_j}\,(0) = a \neq 0$. Définissons $h(z) = (f_1(z), z_2, ..., z_n)$ où $z = (z_1, ..., z_n)$. Il est clair que $J(h)(0) = a \neq 0$. Il existe donc un voisinage ouvert affine V de 0 dans U où $J(h)$ ne s'annule pas. On en déduit donc que h est étalé dans V. Nous allons en déduire que h est injectif dans V. Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ un point de V. Comme $\dfrac{\partial f_1}{\partial T_1}$ ne s'annule pas dans V, on a une relation de la forme $f_1 - f_1(\alpha) = \sum_{1 \leq i \leq s} g_i(T_1 - \alpha_1, ..., T_n - \alpha_n)(T_1 - \alpha_1)^i$ où les g_i sont des polynômes à n variables sur Ω tels que $g_o(0) = 0$ et $\lambda = g_1(0) \neq 0$.
Soit m_α l'idéal maximal de l'anneau local de Ω^n au point α. Alors l'image de $f_i - f(\alpha)$ dans m_α/m_d^2 est combinaison linéaire des images des $T_i - \alpha_i, 1 \leq i \leq n$ et sa coordonnée par rapport à l'image de $T_1 - \alpha_1$ et $\lambda \neq 0$. On en conclut donc que $f_1 - f_1(\alpha), T_2 - \alpha_2, ..., T_n - \alpha_n$ engendrent m_α. Par conséquent le séparé complété de l'anneau local de Ω^n au point α es l'anneau des séries formelles $R_\alpha = \Omega[[X_1, ..., X_n]]$ où $X_1 = f_2 - f(\alpha), X_2 = T_2 - \alpha_2, ..., X_n = T_n - \alpha_n$. Par conséquent pour chaque entier i, $1 \leq i \leq n$, il existe $P_i \in R_\alpha$ tel que $f_i = P_i$. Il est clair que $f_i(\alpha)$ est le terme constant de P_i pour chaque entier i, $1 \leq i \leq n$. Soit $\alpha' = (\alpha'_1, ..., \alpha'_n) \in V$ tel que $h(\alpha) = h(\alpha')$ c'est-à-dire $f_i(\alpha) = f_i(\alpha')$ et i, $1 \leq i \leq n$ $\alpha_i = \alpha'_i$, $1 \leq i \leq n$. On en conclut donc que $R_{\alpha'} = R_\alpha$ et si $f_i = P'_i \in R_{\alpha'}$ pour $1 \leq i \leq n$, on a $P'_i = P_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Donc la relation $h(\alpha) = h(\alpha')$ implique $f_i(\alpha) = f_i(\alpha')$ pour $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire que $f(\alpha) = f(\alpha')$. Alors le fait que f est injectif implique h est injectif dans V.

Cela étant, comme h est plat, c'est un morphisme ouvert. On en déduit donc que h est un homéomorphisme entre V et $W = h(V)$. Ce qui implique que la dimension combinatoire de V est égale à celle de W, et comme la dimension combinatoire est égale à la dimension cohomologique d'après un théorème de GROTHENDIECK, on en déduit que W est affine. Alors l'injectivité de h combiné au fait que h est séparable implique h est birationnel (cf [6] Cor.

1. p. 136). Comme $h : V \longrightarrow W$ est fidèlement plat, on en conclut que h définit un isomorphisme entre V et W que nous noterons également h. Par conséquent $g(W) = f(h^{-1}(W))$ définit un morphisme injectif de W dans Ω^n. Pour $w = (w_1, ..., w_n)$ et $g = (g_1, ..., g_n)$, nous avons la relation :

$$g_1(w) = f_1(h^{-1}(w)) = w_1$$

et $J(f)(0) = a\, J(g)(0)$. On remarquera au passage que les fonctions $g_i \ \ 1 \leq i \leq n$ sont des fractions rationnelles, on peut en les multipliant par un polynôme qui ne s'annule pas dans W les remplacer par des polynômes et le déterminant obtenu est multiplé par une constante non nulle puisque $g_i, 1 \leq i \leq n$. On peut donc supposer que les $g_i,\ 1 \leq i \leq n$, sont des polynômes. Posons $w' = (w_1, ..., w_n)$ et définissons

$$\bar{g}(w') = (g_2(0, w'), ..., g_n(0, w')).$$

Alors $\bar{g}$ définit un morphisme injectif d'un voisinage de 0 dans Ω^{n-1} dans Ω^{n-1}. Par conséquent d'après l'hypothèse de récurrence $J(g)(0) \neq 0$. Mais on a la relation $J(\bar{g}(0) = J(g)(0)$. On en conclut donc que $J(f)(0) \neq 0$.

3) Nous allons maintenant montrer que $J(f)$ ne s'annule pas sur U. Supposons le contraire et soit $Z = V(J(f)) \cap U$ et considérons sur Z la structure de variété algébrique réduite induite par celle de U. Il existe un polynôme $u \in \Omega[T_1, ..., T_n]$ tel que $\underline{O}_Z = \underline{O}_U / u\ \underline{O}_U$. Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ un point non singulier de Z. Si $x_1, ..., x_n$ sont les fonctions coordonnées sur $X = \Omega^n$, il existe parmi les fonctions $x_1 - \alpha_1, ..., x_n - \alpha_n$, $n-1$ fonctions telles que u et ces $n-1$ fonctions engendrent l'idéal maximal m_α de $\underline{O}_{X,\alpha}$. On peut supposer que $u, x_2 - \alpha_2, ..., x_n - \alpha_n$ engendrent m_α. Soit R le séparé complété de $\underline{O}_{X,\alpha}$. Alors $R = \Omega[[y_1, ..., y_n]]$ où $y_1 = u, y_2 = x_2 - \alpha_2, ..., y_n = x_n - \alpha_n$. Comme $J(f)$ s'annule sur Z, alors $\dfrac{\partial f_i}{\partial T_j}$ s'annule en tout point x de Z quelque soit i et j. Ce qui implique que $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ s'annule en tout point x de Z quel que soit $i, 1 \leq i \leq n$ et quel que soit $j,\ i \leq j \leq n$. Pour chaque entier $i, 1 \leq i \leq n$, il existe une série formelle $F_i(y_1, ..., y_n) = \sum\limits_{0 \leq n > +\infty} a_n(y_2, ..., y_n) y_1^n$ telle que $f_i = F_i$. La relation $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} = 0$ sur Z implique le degré de y_j dans $a_o(y_2, ..., y_n)$ est un multiple de la caractéristique p de Ω. Si $p > 0$, cela implique que $\bar{f}_i = v_i^p$ où $\bar{f}_i$ est l'image de f_i dans $\underline{O}_Z$ et $v_i \in \Omega[y_2, ..., y_n]$. Cela impliquerait que $m_\alpha \subseteq m_\alpha^p$ puisque Ω est parfait et que $f_1 - \beta_1, ..., f_n - \beta_n$ où $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) = f(\alpha)$ parce que $\beta_i = \gamma_i^p$ où $\gamma_i \in \Omega$ et donc $\bar{f}_i - \beta_i = (v_i - \gamma_i)^p$.

Ce qui impliquerait que $m_\alpha = 0$ d'après le lemme de NAKAYAMA, et qui contredirait le fait que $dim(\underline{O}_{Z,\alpha}) = n - 1 \geq 1$. Par conséquent si Ω est de caractéristique $p > 0$, $J(f)$ ne s'annule pas dans U. Maintenant si Ω es de caractéristique 0, les relations $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} = 0 \ \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, impliquent que $a_o(y_1, ..., y_n)$ est une constante sur Z, donc f_i est constante sur Z puisque $f_i(\alpha) = \bar{f}_i = a_o(y_1, ..., y_n)$. Ce qui contredit l'injectivité de f. Par conséquent dans ce cas également $J(f)$ ne s'annule pas sur U.

4) Nous allons maintenant montrer que f est une immersion ouverte. Le fait $J(f)$ ne s'annule pas sur U prouve que f est étale sur U, donc f est plat sur U. Par conséquent f est un morphisme ouvert sur U. Soit V un ouvert affine de U et $W = f(V)$. Alors f définit un homéomorphisme entre V et W, donc V et W ont même dimension combinatoire, et comme

la dimension combinatoire est égale à la dimension cohomologique d'après un théorème de GROTHENDIECK, on en déduit que W est un ouvert affine. Alors l'injectivité de $F|V$ combinée avec le fait que $f|V$ est séparable implique que $f|V$ est birrationnel d'après ([6] Cor p. 136). Alors comme $f|V : V \longrightarrow W$ est fidélement plat, on en conclut donc que $f|V$ est un isomorphisme. Ce qui implique que f est une immersion ouverte. □

Démonstration. du Théorème 2.58
Les implications 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) sont triviales. Supposons donc que la condition 3) soit satisfaite. Cela implique d'après le lemme (2.55) que le morphisme $f : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ est un isomorphisme local. On en déduit donc que f est un isomorphisme d'après le corollaire 2.50, le lemme 2.59 et le lemme fondamental. □

Corollaire 2.60. *Soient $A = \Omega[T_1,...,T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur un corps algébriquement clos Ω de caractéristique 0, $f_1,...,f_n$ n éléments de A et $f : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ le morphisme de variétés algébriques sur Ω induit par $(f_1,...,f_n)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un isomorphisme de variétés algébriques sur Ω.*
2. *f est injectif.*
3. *f est localement injectif.*
4. *dét$(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante non nulle de Ω.*

Démonstration. L'assertion découle de la Conjecture Jacobienne et du théorème 2.58. □

Remarque 2.61. Le lemme 2.55 est le théorème de l'invariance du domaine (cf [5] Cor. 14.8 p. 156) en géométrie algébrique. Quant au théorème de l'invariance de la dimension (cf [5] cor. 14.9 p. 157), il découle du MAIN THEOREM de ZARISKI.

En géométrie analytique complexe une démonstration simple du théorème de l'invariance du domaine est dû à J. P. ROSAY (cf [13]). Quant au théorème de l'invariance de la dimension en géométrie analytique complexe, il découle du même théorème établi dans le cadre topologique (cf [5] cor. 14.9 p. 150).
Nous signalerons enfin que le lemme 2.55 découle du théorème 2.49 lorsque Ω est de caractéristique 0.

Théorème 2.62. *(Conjecture Jacobienne Généralisée)*
Soient R un anneau intègre , $A = R[T_1,...,T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur R , et $f_1,...,f_n$ n éléments de A. On suppose que dét$(\partial f_i/\partial T_j)$ est un élément inversible de R. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
1) L'injection canonique $R[f_1,...,f_n] \longrightarrow R[T_1,...,T_n]$ est un isomorphisme.
2) Le degré de l'extension du corps des fractions de $A = R[T_1,...,T_n]$ sur celui de $B = R[f_1,...,f_n]$ n'est pas divisible par la caractéristique du corps des fractions de R.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.63. *Soient A un anneau noethérien intègre et normal, K son corps des fractions L une extension finie de K et B la fermeture intègrale de A dans L. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) Le degré de L sur K n'est pas divisible par la caractéristique de K.
2) B est une A - algèbre séparable
3) Tout élément inversible de B appartient à A.
Alors l'injection canonique $A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.

Démonstration. :
La condition 1) implique que L est une extension séparable de K. Par conséquent B est une A algèbre finie. Soient alors $x_1,...,x_n$ des éléments de B tels que $B = A[x_1,...,x_n]$. Nous allons établir l'assertion par récurrence sur n.
1) Nous supposerons pour commencer que $n = 1$.
Soit T une indéterminée. Alors le noyau de l'homomorphisme $\varphi : A[T] \longrightarrow B$ de A - algèbre défini par $\varphi(T) = x_1$ est engendré par un polynôme unitaire $f(T)$ de degré m = degré de l'extension de L sur K d'après ([18]). Comme B est une A - algèbre séparable, donc étale d'après ([1] 1[12]), on en conclut que $a = f'(x)$ est un élément inversible de B d'après ([1] cor. 1.4). Or d'après l'hypothèse 3), a est un élément de A, ainsi que a^{-1}, donc a est un élément inversible de A. Cela étant $g(T) = f'(T) - a$ est un élément de $A[T]$ qui appartient à $Ker(\varphi)$. Autrement dit $g(T)$ est un multiple de $f(T)$ dans $A[T]$. Mais comme m n'est pas divisible par la caractéristique de K , on en conclut donc que $f'(T)$ est de degré $m-1$. Par conséquent $g(T)$ est soit égal à 0 soit de degré $m-1$. On a donc nécessairement $g(T) = 0$, ce qui implique que $f'(T) = a$, donc $m = 1$, c'est à dire que $f(T) = aT - b$ où $b \in A$. Comme $f(x_1) = 0$ et a est inversible dans A , on en conclut donc que $x_1 = a^{-1}b \in A$, donc l'injection canonique $A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.
2) Nous allons maintenant supposer que $n \geq 2$. Soient $A_i = A[x_1,...,x_i]$ et K_i le corps des fractions de A_i pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$. Désignons par A' la fermeture intégrale de A dans K_1. Comme A' est contenu dans B , alors A' est un anneau noethérien intègre et normal. En outre les conditions 1) , 2) et 3) du lemme (2.63) satisfaites par le couple (A,B) sont également satisfaites par le couple (A',B) , et comme $B = A'[x_2,...,x_n]$, l'hypothèse de récurrence implique que $B = A'$ et donc $L = K_n = K_1$.
Comme tenu du résultat établi dans la partie 1) , pour prouver que l'injection canonique $A \longrightarrow B$ est un isomorphisme, il suffit de prouver que
$B = A_1 = A[x_1]$. Mais comme B et A_1 ont le même corps des fractions, pour prouver que $B = A_1$, il suffit de prouver que B est un A_1 - module fidèlement plat, et puisque $Spec(B) \longrightarrow Spec(A_1)$ est surjectif, il suffit de prouver que B est un A_1 - module plat. Par conséquent l'assertion découle du lemme suivant où l'on prend $C = A_1$. □

Lemme 2.64. *Soient A un anneau intègre ou un anneau noethérien, B une A - algèbre et C une sous A - algèbre de B. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) B est un A - module plat de type fini
2) C est un A - module libre de type fini
Alors B est un C - module projectif de type fini.
En outre si B est une A - algèbre étale, alors C est une A - algèbre étale et B est une C - algèbre étale.

Démonstration. Comme A est un anneau intègre ou un anneau noethérien et B est un A - module plat de type fini, alors B est un A - module projectif de type fini (cf Bourbaki : Alg. Com. 11 et 5 exercice 6 lorsque A est intègre) et par conséquent B est un facteur direct de A^m pour un entier $m \geq 1$ en tant que A - module. On en déduit donc que $B \otimes_A B$ est un facteur direct de $B^m \simeq B \otimes_A A^m$ en tant que A - modules. Ce qui implique donc que $B \otimes_A B$ est un A - module projectif de type fini. Or on a la relation $B \otimes_A B \simeq B \otimes_C B \otimes_A C$ et comme C est isomorphe à A^n pour un entier $n \geq 1$, en tant que A - module, on en déduit donc la relation $B \otimes_A B \simeq B \otimes_C B \otimes_A A^n \simeq (B \otimes_C B)^n$ en tant que A - modules. Ce qui implique donc que $B \otimes_C B$ est un A - module projectif de type fini et aussi que $B \otimes_A B \simeq B \otimes_C B \otimes_A C$ est un C - module projectif de type fini. Comme la suite exacte de B - modules $0 \longrightarrow Ker(\pi) \longrightarrow B \otimes_A B \longrightarrow B \longrightarrow 0$ est scindée, elle est scindée en tant que suite exacte de C - modules. Ce qui implique donc que B est un C - module projectif de type fini. En outre si B st une A - algèbre étale, il n'est pas difficile de conclure que C est une A - algèbre étale et que B est une C - algèbre étale.

Démonstration de la conjecture jacobienne généralisée

Soient K le corps des fractions de A , Ω la clôture algébrique de K,
$A_o = K[T_1,..,T_n]$, $A'_o = \Omega[T_1,...,T_n]$, $B_o = K[f_1,..,f_n]$ et $B'_o = \Omega[f_1,...,f_n]$.
D'après le lemme fondamental, A'_o est une B'_o - algèbre finie et comme B'_o est entier sur B_o, on en conclut donc que A'_o est entier sur B_o. Par conséquent A_o qui est une sous - B_o - algèbre de A'_o est un anneau qui est entier sur B_o. Ce qui prouve donc que le couple (B_o,A_o) satisfait aux conditions 1), 2) et 3) du lemme (2.63). On en déduit donc que l'injection canonique $B_o \longrightarrow A_o$ est un isomorphisme, ce qui implique donc que B et A ont le même corps des fractions.
On démontre de la même manière que pour tout idéal premier p de R , l'injection canonique $\varphi(p) : k(p)[f_1,...,f_n] \longrightarrow k(p)[T_1,...,T_n]$ est un homomorphisme entier et injectif, ce qui implique que le morphisme canonique $Spec(A) \longrightarrow Spec(B)$ est surjectif d'après le premier théorème de COHEN - SEIDENBERG appliqué aux homomorphismes $\varphi(p)$, $p \in Spec(R)$. Par conséquent comme A est une B - algèbre étale, alors A est une B - algèbre fidèlement plate, et comme B et A ont même corps des fractions, on en conclut que l'injection canonique $B \longrightarrow A$ est un isomorphisme. □

Corollaire 2.65. *Soient R un anneau intègre dont le corps des fractions est de caractéristique 0 , $A = R[T_1,...,T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur R et $f_1,...,f_n$ n éléments de A. On suppose que $dét(\partial f_i/\partial T_j)$ est un élément inversible de $\mathcal{R}$. Alors l'injection canonique $R[f_1,...,f_n] \longrightarrow R[T_1,...,T_n]$ est un isomorphisme.*

Corollaire 2.66. *Soient $A = \mathbb{Z}[T_1,...,T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur $\mathbb{Z}$ et $f_1,...,f_n$ n éléments de A. On suppose que $dét(\partial f_i/\partial T_j) = \pm 1$. Alors l'injection canonique $\mathbb{Z}[f_1,...,f_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[_1,...,T_n]$ est un isomorphisme.*

Corollaire 2.67. *Soient K un corps de caractéristique p , $A = K[T_1,...,T_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur K et $f_1,...,f_n$ n éléments de A. On suppose que $dét(\partial f_i/\partial T_j)$ est une constante non nulle de K. alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) L'injection canonique $K[f_1,...f_n] \longrightarrow K[T_1,...,T_n]$ est un isomorphisme.
2) Le degré de l'extension du corps des fractions de A sur celui de B n'est pas divisible par p.

Corollaire 2.68. *(Conjecture Jacobienne)*
Soient K un corps de caractéristique 0 , $A = K[T_1, ..., ; T_n]$ *l'anneau des polynômes à n variables sur K et* $f_1, .., f_n$ *n éléments de A. On suppose que* $\text{dét}\partial f_i/\partial T_j)$ *est une constante non nulle de K. Alors l'injection canonique* $K[f_1, ..., f_n] \longrightarrow K[T_1, ..., T_n]$ *est un isomorphisme.*

Le lemme (2.60) permet également de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.69. *Soient A un anneau intègre et intégralement clos et B une A - algèbre finie étale est une A - algèbre finie et étale. Alors pour tout élément x de B, l'anneau* $A[x]$ *est une A - algèbre finie et B est un* $A[x]$ *- module projectif de type fini.*

Démonstration. L'anneau $A[x]$ étant un A - module libre de type fini d'après ([18]) , l'assertion découle donc du lemme (2.60). □

Corollaire 2.70. *Soit A un anneau intègre et intégralement clos. Alors toute A - algèbre finie étale et intègre B et toute A - algèbre finie et fidèlement plate B dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A , est une A - algèbre monogène.*

Démonstration. Comme le corps des fractions de B est une extension séparable du corps des fractions de A , il existe un élément x de B qui engendre le corps des fractions de B sur celui de A. Or d'après le théorème 2.69, B est un $A[x]$ - module projectif de type fini lorsque B est une A - algèbre finie étale. Donc B est d'après le lemme 2.64 puisque $A[x]$ est un A - module libre de type fini d'après ([18])un $A[x]$ - module fidèlement plat qui a même corps des fractions que $A[x]$. Ce qui implique que $B = A[x]$. □

Corollaire 2.71. *Soient A un anneau noethérien intègre et normal et B une A - algèbre étale intègre.*
On suppose que le morphisme canonique $Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ *est surjectif. Alors B est une A - algèbre finie et monogène.*

Démonstration. : D'après le lemme (2.1), B est une A - algèbre finie, donc l'assertion découle du corollaire (2.70). □

Théorème 2.72. *Soient A et B deux anneaux noethériens intègres,* $f : A \longrightarrow B$ *un homomorphisme d'anneaux et* ${}^a f : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ *le morphisme induit par* f.
On suppose vérifiées les conditions suivantes :
1) A est normal
2) f *est injectif*
3) f *est séparable*
4) ${}^a f$ *est surjectif*
5) Tout élément inversible de B est l'image par f *d'un élément inversible de* A.
6) Le degré de l'extension du corps des fractions de B sur celui de A induit par f *n'est pas divisible par la caractérisation du corps des fractions de A.*
Alors l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme A est normal, alors d'après $([1](12)(1c))$, f est un morphisme étale puisque f est injectif d'après la condition 2).
On en conclut donc d'après (2.71) que B est une A - algèbre finie et d'après le lemme (2.63) que l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme d'anneaux. □

Corollaire 2.73. *Soient A une algèbre intègre et normale de type fini sur un corps K et $f : A \longrightarrow A$ un endomorphisme de K - algèbre. On suppose vérifier les conditions suivantes :*
1) f est séparable
2) Tout élément inversible de A est un élément non nul de K.
3) Le degré de l'extension de corps induit par f n'est pas divisible par la caractéristique de K. Alors l'endomorphisme $f : A \longrightarrow A$ est un automorphisme de K - algèbres.

Démonstration. Soit Ω une clôture algébrique de K. Comme l'application $\pi :$ Max $((A \otimes_K \Omega)_{rèd}) \longrightarrow$ Max $((A \otimes_K \Omega))_{rèd})$ est surjective d'après ([10]), on en déduit donc que l'application $\varphi :$ Max $(A) \longrightarrow$ Max (A) induite par f est surjective. L'assertion découle donc du théorème 2.72 puisque le fait que φ soit surjective implique que le morphisme ${}^a f$: $Spec(A) \longrightarrow Spec(A)$ est surjectif puisque f est plat et aussi que f est injectif. □

Corollaire 2.74. *Soient A une algèbre intègre et normale de type fini sur un corps de caractéristique 0 et $f : A \longrightarrow A$ un endomorphisme de K - algèbre. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) f est séparable
2) Tout élément inversible de A est un élément non nul de K.
Alors l'homomorphisme $f : A \longrightarrow A$ est un automorphisme de K - algèbre.

Théorème 2.75. *Soient A et B deux anneaux noethériens intègres et $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) A est un anneau factoriel
2) f est injectif
3) f est séparable
4) Tout élément inversible de B es l'image par f d'un élément inversible de A.
5) Le degré de l'extension du corps des fractions de B sur celui de A induit par f n'est pas divisible par la caractéristique du corps des fractions de A.
Alors l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.

Démonstration. Posons $X = Spec(A)$, $Y = Spec(B)$ et ${}^a f : Y \longrightarrow X$ le morphisme induit par f. Comme f est injectif et A est normal et intègre, ${}^a f$ est nécessairement étale (cf [1] (12) (12)). On en conclut donc ${}^a f$ est un morphisme plat de type fini, donc un morphisme ouvert. Ce qui implique donc que $U =^a f(Y)$ est un ouvert de Y. Posons $Z = Y - U$ et supposons que $Codim(Z,Y) \leq 1$. Puisque Y est irréductible et I est un fermé de Y , nous avons soit $codim(Z,Y) = 1$ soit $Z = \phi$.
i) Supposons pour commencer que $Z = \phi$. Cela signifie que ${}^a f$ est surjectif. par conséquent toutes les conditions du théorème (2.72) sont satisfaites, ce qui implique que l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.
ii) Supposons maintenant que $Z \neq \phi$ et $codim(Z,Y) \leq 1$, ce qui implique donc que $codim(Z,Y) = 1$. D'après la factorialité de A , il existe donc $\alpha \in A$ non inversible tel

que $V(\alpha) \subseteq Z$, donc $f(\alpha)$ n'appartient à aucun idéal premier de B , ce qui signifie que $f(\alpha)$ est un élément inversible de B. Alors les conditions 2) et 4) impliquent que α est un élément inversible de A. Ce qui contredit donc le fait que α n'est pas inversible dans A.
iii) Nous pouvons donc supposer que $codim(Z,Y) \geq 2$. Alors pour tout ouvert affine W de U , le morphisme ${}^a f(W) \longrightarrow W$ induit par ${}^a f$ est surjectif et affine. Ce qui implique donc que $\Gamma({}^a f^{-1}(W), \underline{O}_Y)$ algèbre fini d'après (2.71). Par conséquent si $g : X \longrightarrow U$ est le morphisme induit par f , $g_* \underline{O}_X$ est un $\underline{O}_U$ - module localement libre de type fini engendré par ses sections globales. On en déduit donc que $i_* \, g_* \underline{O}_X$ est un $\underline{O}_Y$ - module cohérent où $i : U \longrightarrow Y$ est l'injection canonique (cf [16] Théorème 1) qui est également vrai lorsque X est un schéma noethérien normal et irréductible. Ce qui prouve donc que B est une A - algèbre fini. Alors le premier théorème de COHEN - SEIDENBERG prouve donc que ${}^a f : Y \longrightarrow X$ est surjectif. Par conséquent toutes les conditions du théorème 2.72 sont satisfaites, ce qui implique que l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme. □

Nous avons également établi le résultat suivant.

Théorème 2.76. *Soient A et B deux anneaux noethériens intègres et $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) A est un anneau factoriel
2) f est injectif
3) f est séparable
4) Tout élément inversible de B est l'image par f d'un élément inversible de A.
Alors B est une A - algèbre finie et monogène.

Démonstration. En démontrant le théorème **??**, nous avons montré que les conditions 1), 2), 3) et 4) précédentes impliquent que le morphisme
${}^a f : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ est surjectif.
L'assertion découle donc de(2.71).
Les deux théorèmes suivants qui donnent des réponses partielles aux questions 3.4 et 3.5 posés dans ([1]) découlent directement du théorème **??**.
Les deux théorèmes suivants qui donnent des réponses partielles aux questions 3.4 et 3.5 posés dans ([1]) découlent directement du théorème **??**. □

Théorème 2.77. *Soient R un anneau noethérien factoriel, $A = R[X_1,..,X_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur R, B une R - algèbre intègre de type fini qui contient R et f : $A \longrightarrow B$ un homomorphisme de R - algèbres. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) f est injectif
2) f est séparable
3) Tout élément inversible de B appartient à R
4) Le degré de l'extension du corps fractions de B sur celui de A induit par f n'est pas divisible par la caractéristique du corps des fractions de A.
Alors l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.

Théorème 2.78. *Soient R un anneau noethérien factoriel, $A = R[X_1,...,X_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur R , B une R -algèbre intègres de type fini qui est une sous - R - algèbre de l'anneau des polynômes à m variables sur A et $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme*

de R - algèbres.
On suppose vérifiées les conditions suivantes :
1) f est injectif
2) f est séparable
3) Le degré de l'extension du corps des fractions de B sur celui de A induit par f n'est pas divisible par la caractéristique du corps des fractions du corps des fractions de A.
Alors l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.

Corollaire 2.79. *Soient R un anneau noethérien factoriel dont le corps des fractions est de caractéristique 0, $A = R[X_1,..,X_n]$ l'anneau des polynômes à n varibles sur R, B une R - algèbre intègre de type fini qui contient R et $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme de R - algèbres. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) f est injectif
2) f est séparable
3) Tout élément inversible de B appartient à R. Alors l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.

Corollaire 2.80. *Soient R un anneau noethérien factoriel dont le corps des fractions est de caractéristique 0, $A = R[X_1,...,X_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur R, B une R - algèbre intègre de type fini qui est une sous - R -algèbre de l'anneau des polynômes à m variables sur A et $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme de R - algèbres. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) f est injectif
2) f est séparable.
Alors l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.

Corollaire 2.81. *(Conjecture Jacobienne Généralisée de Bass en Caractéristique p) :*
Soient X une variétét algébrique affine irréductible sur un corps algébriquement clos Ω de caractéristique $p > 0$ et $f : X \longrightarrow \Omega^n$ un morphisme de variétés algébriques sur Ω. On suppose vérifiées les conditions suivantes :
1) $dim(X) = n$
2) f est étale
3) Toute fonction régulière sur X qui est inversible est constante.
4) Le degré de l'extension du corps des fonctions rationnelles sur X n'est pas divisibles par p.
Alors $f : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme de variétés algébriques sur Ω.

Corollaire 2.82. *(Conjecture Jacobienne généralisée de Bass en Caractéristique 0) :*
Soient X une variété algébrique affine irréductible sur un corps algébriquement clos Ω de caractéristique 0 et $f : X \longrightarrow \Omega^n$ un morphisme de variétés algébriques sur Ω. On suppose vérifiées les conditions suivantes :
1) $dim(X) = n$.
2) f est étale
3) Toute fonction régulière sur X qui est inversible est constante.
Alors $f : X \longrightarrow \Omega^n$ est un isomorphisme de variétés algébriques sur Ω.

Corollaire 2.83. *(Conjecture Jacobienne Généralisée de Bass Complexe) :*
Soient X une variété affine irréductible complexe et $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un morphisme de variétés

algébriques complexes. On suppose vérifiées les conditions suivantes :
1) $dim(X) = n$
2) Toute fonction régulière sur X qui est inversible est constante, condition qui est satisfaite lorsque X_{an} est simplement connexe (df. I6.7.2).
Alors $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est un isomorphisme de variétés algébriques complexes.

Définition 2.84. Soient A un anneau et B une A - algèbre. On dira que la propriété $P(B)$ est satisfaite si pour tout idéal I de A tel que $I \neq A$ et l'ouvert $U = D(I)$ de $Spec(A)$ est affine, $IB \neq B$.
i) Si A est un anneau noethérien intègre et normal, un idéal I de A tel que $I \neq A$ et $U = D(I)$ est un ouvert affine de $Spec(A)$, alors on a $ht(I) \leq 1$.
En effet la relation $ht(I) \geq 2$ implique que l'homomorphisme canonique $\Gamma(X, \underline{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \underline{O}_X)$ où $U = D(I)$ et $X = Spec(A)$, est un isomorphisme. Si en plus U est affine, cela impliquerait que l'injection canonique $i : U \longrightarrow X$ est un isomorphisme. Ce qui impliquerait que $I = A$, d'où la conclusion.
ii) Si en plus A est un anneau noethérien factoriel, les relations $I \neq A$ et $U = D(I)$ est un ouvert affine de $Spec(A)$ implique que $I \subseteq aA$ où a n'est pas un élément inversible de A. Alors si B est une A - algèbre, pour que la propriété $P_A(B)$ soit satisfaite il suffit que l'image de a dans B ne soit pas un élément inversible de B. Par conséquent la relation $P_A(B)$ sera satisfaite si $f^{-1}(B^*) = A^*$ où $f : A \longrightarrow B$ désigne l'homomorphisme canonique, A^* l'ensemble des éléments inversibles de A et B^* l'ensemble des éléments inversibles de B.
En particulier si f est injective et si f induit une bijection entre A^* et B^* , alors la propriété $P_*(B)$ est satisfaite.

Théorème 2.85. *Soient A et B deux algèbres intègres de type fini sur un corps algébriquement clos Ω , $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme de Ω - algèbres et ${}^af : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ le morphisme de schémas associé à f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) $dim(A) = dim(B)$
2) ${}^af$ est localement injectif
3) Le corps des fractions de B est une extension séparable de celui de A
4) A est normale
5) $P_A(B)$ est satisfaite.
Alors l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.86. *Soient A et B deux anneaux, $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et ${}^af : X = Spec(B) \longrightarrow Y = Spec(A)$ le morphisme de schémas associé à f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) $U = {}^a f(X)$ est un ouvert affine de Y
2) $P_A(B)$ est satisfaite. Alors le morphisme ${}^af : X \longrightarrow Y$ est surjectif.

Démonstration. : Il existe donc un idéal I de A tel que $U = D(I)$. Il est clair qu'on a la relation $IB = B$. Mais comme la propriété $P_A(B)$ est satisfaite, on en conclut que $I = A$. Ce qui prouve donc que $Z = Y - U = \phi$, c'est à dire que $U = Y$, ce qui signifie que ${}^af$ est surjectif. □

Démonstration. (du théorème 2.85)
D'après le théorème (VI), ${}^a f : X = Spec(B) \longrightarrow Y = Spec(A)$ est une immersion ouverte. Ce qui implique donc que $U = {}^a f(X)$ est un ouvert affine de Y. Le lemme (VIII.14.1) permet de conclure que ${}^a f$ est surjectif, ce qui signifie que ${}^a f$ est un isomorphisme de schémas, donc l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.
Le résultat suivant est dû à K. ADJAMAGBO (cf [1] Théorème d'isomorphisme). □

Corollaire 2.87. *Soient A et B deux algèbres intègres de type fini sur un corps algébriquement clos Ω, $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme de Ω - algèbres et ${}^a f : spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ le morphisme de schémas associé à f. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*
1) $dim(A) = dim(B)$
2)${}^a f$ *est localement injectif*
3) Le corps des fractions de B est une extension séparable du corps des fractions de A.
4) A est un anneau factoriel
5) f induit un isomorphisme entre A^* et B^*.
Alors l'homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme.

Remarque 2.88. (Remarque finale)
K. ADJAMAGBO et A. Van den ESSEN ont démontré dans leur article : **On the equivalence of the Jacobian, DIXMIER and POISSON Conjectures in any characteristic**, voir ArXiv.Org, que la conjecture jacobienne est équivalente à la conjecture de DIXMIER et à celle de POISSON. Autrement dit on a les deux résultats suivants :

Théorème 2.89. *(CONJECTURE DE DIXMIER)*
Tout endomorphisme d'une algèbre quantique de DIRAC (ou algèbre de WEYL) sur une $\mathbb{Q}$ - algèbre commutative unitaire intègre, c'est à dire d'une algèbre sur une $\mathbb{Q}$ - algèbre commutative d'opérateurs différentiels à coefficients dans une algèbre de polynômes sur cette $\mathbb{Q}$ - algèbre commutative unitaire intègre, est un automorphisme.

Théorème 2.90. *(CONJECTURE DE POISSON) :*
Tout endomorphisme d'une algèbre de POISSON canonique sur un anneau intègre contenant $\mathbb{Q}$ est un automorphisme.

Les résultats de K. ADJAMAGBO et A. Van den ESSEN dans l'article cité plus haut permettent via la conjecture jacobienne généralisée d'obtenir les deux résultats suivants :

Théorème 2.91. *(CONJECTURE DE DIXMIER GENERALISEE)*
Tout endomorphisme f d'une algèbre quantique de DIRAC (ou algèbre de WEYL) d'ordre n sur un anneau intègre R dont le corps des fractions est de caractéristique p est un automorphisme si la restriction de f au centre $Z(A)$ de A induit une extension de corps dont le degré n'est pas un multiple de p, et si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
1) $n < p$
2) $n \geq p$ et le déterminant jacobien de la restriction de f à $Z(A)$ est un élément inversible de R.

Théorème 2.92. *(CONJECTURE DE POISSON GENERALISEE)*
Tout endomorphisme d'une algèbre de POISSON canonique d'ordre n sur un anneau intègre R dont le corps des fractions est de caractéristique p qui induit une extension de

corps dont le degré n'est pas un multiple de p est un automorphisme si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
1) $n < p$
2) $n \geq p$ *et le déterminant jacobien de* f *est un élément inversible de* R.

Références

[1] K. ADJAMAGBO , *On separable algebras over UFD and the Jacobian Conjecture in any characteristic*, Publications mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie N° 113.

[2] K. ADJAMAGBO , *Sur les morphismes injectifs et les isomorphismes de variétés algébriques affines*, Comm. in Algebra , 24(3), p. 1117 - 1123 (1996).

[3] K. ADJAMAGBO , *Simple reasons with injective polynomial endomorphisms are automorphisms*, Preprint.

[4] J. M. ARNAUDIES et BERTIN , *Surfaces de Riemann, Equations de Halphen et Groupes Polyédraux. Groupes, algèbres et Géométrie*, Tome 3 - Ellipses Editions Marketing S.A, 2001.

[5] E. ARTIN et H. BRAUN , *Introduction to Algebraic Topology* Charles E. Merryl Company, A Bell and Howell Company, Columbus, Ohio, 1969.

[6] J. A. DIEUDONNE , *Géométrie Algébrique 2*, P.U.F. 1974.

[7] L. GRUSON et M. RAYNAUD , *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. 13 p1 - 89 (1971).

[8] R. HARTSHORNE , *Algebraic Geometry*, GTM 52, Springer Verlag, 1977.

[9] A. HENAUT et A. YGER , *Eléments de Géométrie*, Ellipses Editions Marketing S.A,2004.

[10] M. C. KANG , *Injective morphisms of affine varieties*, Proc. AMS 119, 1 (1993) p. 1 - 4.

[11] K. J. NOWAK : , *Injective endomorphisms of algebraic varieties*, Math. Ann. , 299 (1994) p. 769 - 778.

[12] R. PIENE , *Faisceaux plats et purs sur la base : un théorème de finitude C.R.* Acad. Sc. Paris, t 274 p 194 - 197 (1972).

[13] J. P. ROSAY , *Injective holomorphic mapping*, Amer. Math. Monthly, 89 (1982) p. 587 - 588.

[14] W. RUDIN, *Injective polynomial maps are automorphisms*, Amer. Math. Monthly, 102 (1995) p. 540 - 543.

[15] J. P. SERRE , *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1 - 2, 1956.

[16] J. P. SERRE , *Prolongement de faisceaux analytiques cohérents*, Ann. de l'Institut Fourier, tome 16, n° 1 (1966) p 363 - 374.

[17] H. SEYDI, *La Conjecture Jacobienne*, Rendiconti del Sem. Mat. di Messina, Série II, Volume N° 6 (1999) p. 175 - 179.

[18] H. SEYDI : , *Un théorème de descente effective universelle et une application C.R.* Acad. Sc. Paris, Série A, t. 270 (1970).